Die Bestimmung des Standpunktes und der äusseren Orientierungselemente in der Photogrammetrie bei bekannter innerer Orientierung.

Von der

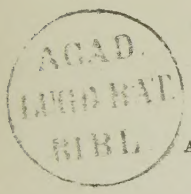
K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation.



Vorgelegt von

Karl Förg

Assistent der K. Kreis-Oberrealschule zu Nürnberg.

Referent: **Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder.**

Korreferent: **K. Geh. Rat Prof. Dr. Walther Ritter von Dyck.**

Tag der mündlichen Prüfung: 20. März 1909.

Nürnberg 1909

Kgl. Bayer. Hofbuchdruckerei von U. E. Sebald.

Meinen lieben Eltern
gewidmet.

Inhaltsangabe.

Seite

I. Bestimmung des Standpunktes und der äußeren Orientierungselemente aus 3 bekannten Objektpunkten und ihren Bildern auf einer Photographie.

§ 1. Die Gleichungen für die Bestimmung des Standpunktes . 7
§ 2. Die positiven Wurzeln der Bestimmungsgleichungen als Bedingung für die Brauchbarkeit der Standpunkte . . 10
§ 3. Über die Lage der Standpunkte 14
§ 4. Der gefährliche Ort für die Lage der Standpunkte . . . 21
§ 5. Praktische Ausführung der Bestimmung des Standpunktes und der äußeren Orientierungselemente 33
§ 6. Numerisches Beispiel. 42

II. Bestimmung des Standpunktes aus 2 bekannten Objektpunkten, ihren photographischen Bildern und dem Fluchtpunkt der vertikalen Richtung.

§ 7. Die Gleichungen für die Bestimmung des Standpunktes . 52
§ 8. Die Brauchbarkeit der Standpunkte 55
§ 9. Über die Lage der Standpunkte 59
§ 10. Der gefährliche Ort für die Lage der Standpunkte . . . 62

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555418_0033

Burghausen a. d. Salzach.

Ballonaufnahme von K. v Bassus aus 2340 m abs. Höhe.

Die Photogrammetrie stellt der Hauptsache nach zwei Aufgaben: die Ausmessung und Rekonstruktion eines Geländes oder einzelner Objekte mit Hilfe von zwei oder mehreren Photographien und die Bestimmung des Standpunktes, von dem aus eine photographische Aufnahme gemacht ist. Mit einer Art der Lösung der letzteren Aufgabe befaßt sich die vorliegende Abhandlung.

Die Frage nach dem Standorte hat insbesondere seit der Entwickelung der Ballonphotogrammetrie in den letzten zwei Jahrzehnten an Bedeutung gewonnen. Sie ist der Verschiedenheit der Daten entsprechend wiederholt schon zum Gegenstande der Untersuchung gemacht worden. Dabei unterscheiden sich die Bearbeitungen, welche die innere Orientierung des photographischen Apparates, nämlich den Abstand (Bildweite) des optischen Zentrums von der photographischen Platte (Bildebene) und den Fußpunkt (Hauptpunkt) dieses Lotes auf der Bildebene, als bekannt voraussetzen, prinzipiell von denen, welche die Kenntnis der inneren Orientierung ausschließen.

Ist die innere Orientierung nicht bekannt, so lassen sich aus den Grundrissen von 7 Objektpunkten und ihren Bildern oder aus den Grundrissen von 5 Objektpunkten, ihren Bildern und dem Fluchtpunkte der vertikalen Richtung auf der Photographie („Problem der 5 Punkte") der Grundriß des Standpunktes und aus 6 Punkten und ihren Bildpunkten („Problem der 6 Punkte") der Standpunkt selbst bestimmen.*)

Für die praktische Verwendbarkeit der Photographien ist indeß die Kenntnis der inneren Orientierung ungleich vorteilhafter. Man bedient sich dabei zur Rekonstruktion der Lage des Standpunktes fast ausnahmslos der Methode des Rückwärtseinschneidens. Werden 3 Objektpunkte und ihre photographischen Bilder als bekannt angenommen — wobei noch einer der 3 Punkte durch die

*) S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1899, VI. Bd. 2. Heft § 19 mit § 21.

W. Scheufele, Die Aufgabe der 6 Punkte in der Photogrammetrie. Dissertation. München 1907.

vertikale Richtung und ihren Fluchtpunkt auf der Bildebene ersetzt sein kann —, so entsteht die Aufgabe, das Dreikant der Visierstrahlen vom Standpunkte nach den Objektpunkten nach einem Dreieck zu schneiden, das dem Dreieck dieser 3 Punkte kongruent ist. In dieser Form hat sie schon wiederholt Bearbeitung erfahren. Eine von Herrn Prof. Finsterwalder*) angegebene Methode, das aus dem Dreikante und der Ebene der Festpunkte gebildete Tetraeder zu berechnen, bildet die Grundlage zu der gegenwärtigen Untersuchung. Die Frage, wieviele Punkte des Raumes in Verbindung mit den Fixpunkten Dreikante liefern, die dem aus der Photographie entnommenen kongruent sind, also die Frage nach der Anzahl der in diesem Sinne brauchbaren Standpunkte findet hierin ihre Lösung, während sich Herr Prof. Finsterwalder darauf beschränkt, den einen Standpunkt zu suchen, von dem aus die Aufnahme gemacht ist. Für die Lage dieser Standpunkte wird eine Einteilung des gesamten Raumes in gewisse Teilräume angegeben, denen sich die Punkte lediglich auf Grund der photographisch ermittelten Bestimmungsstücke, nämlich der Winkel zwischen den Sehstrahlen, zuordnen lassen. Eine eingehende Determination der Aufgabe gewährt Aufschluß über den Umfang der geometrischen Örter von zusammenfallenden Standpunkten, zum Teil auch der von höherer Ordnung mit einer dreifach zählenden Lösung. Außerdem erfolgt die Aufstellung eines bestimmten Formelsystems für die praktische Berechnung des Ballonortes nach Höhe und Horizontalprojektion sowie der äußeren Orientiernng gegen die Lotlinie. Schließlich findet die gegebene Theorie ihre Illustration durch Anwendung auf ein numerisches Beispiel, dem eine von Herrn K. v. Bassus aufgenommene Photographie des Geländes von Burghausen a. d. Salzach zugrunde liegt.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn Professor Dr. S. Finsterwalder. Es sei mir gestattet, ihm sowohl hierfür, wie auch für die wohlwollende Unterstützung bei der Ausführung meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

*) S. Finsterwalder, ibid. § 22 u. 23.

I. Die Bestimmung des Standpunktes und der äusseren Orientierungselemente aus 3 bekannten Objektpunkten und ihren Bildern auf einer Photographie.

§ 1.

Die Gleichungen für die Bestimmung des Standpunktes.

Bekannt sind ihrer Lage nach 3 Punkte des Objektes, die Fixpunkte A, B, C und ihre Bilder A_1, B_1, C_1 auf einer Photographie, sowie der Hauptpunkt und die Bildweite des photographischen Apparates. Man soll die Lage des Standpunktes bei der photographischen Aufnahme und die Elemente der äußeren Orientierung gegen die Lotlinie finden.

Diese Aufgabe hat ihre vorzüglichste praktische Bedeutung in der Ballonphotogrammetrie. Man macht vom Luftballon aus eine Aufnahme des Geländes mit einem Apparate, dessen innere Orientierung man kennt, und sucht mit Hilfe des Dreikants der von dem perspektivischen Zentrum nach 3 markanten Punkten des photographierten Objektes und ihren deutlich identifizierbaren Bildpunkten gehenden Strahlen, sowie der Elemente der inneren Orientierung den mit der Lage des Standpunktes identischen augenblicklichen Ort des Ballons, ferner die Richtung der optischen Axe bezw. die Neigung der photographischen Platte, den Horizont und die Hauptvertikale der Aufnahme.

Zunächst berechnet man die Winkel α, β, γ an der Spitze des Dreikants $OA_1B_1C_1$ (Fig. 1) und die Entfernungen a, b, c der Fixpunkte A, B, C voneinander und kann dann zur Auffindung des Standpunktes das folgende System von Bestimmungsgleichungen

für die Kanten l, m, n der 3-seitigen Pyramide $OABC$ aufstellen:*)

1. $a^2 = m^2 + n^2 - 2\,m\,n\cos\alpha$
2. $b^2 = n^2 + l^2 - 2\,n\,l\cos\beta$
3. $c^2 = l^2 + m^2 - 2\,l\,m\cos\gamma$.

Aus diesen Gleichungen folgen die zwei in den Unbekannten homogenen Gleichungen 2. Grades:

4. $a^2 l^2 - b^2 m^2 + (a^2 - b^2) n^2 - 2a^2 \cos\beta\, l\, n + 2b^2 \cos\alpha\, m\, n = 0$
5. $(b^2 - c^2) l^2 + b^2 m^2 - c^2 n^2 - 2b^2 \cos\gamma\, l\, m + 2c^2 \cos\beta\, l\, n = 0$,

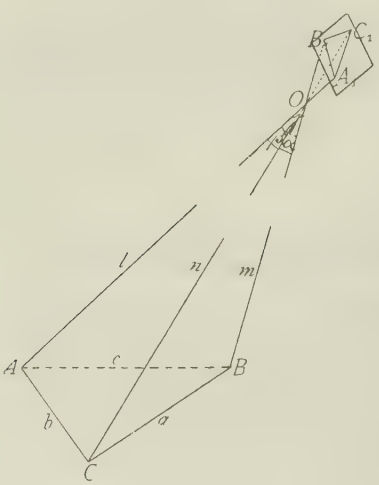


Fig. 1.

die schließlich auf eine Gleichung 4. Grades für das Verhältnis zweier Kanten führen. Das Verhältnis von zwei anderen Kanten kann linear durch das erstere ausgedrückt werden, sodaß also 4 verschiedene Verhältnisse $l : m : n$ sich ergeben. Die 3 einfachen Verhältnisse, in die ein solches kontinuierliche Verhältnis zerlegt werden kann, definieren Kugeln, deren Mittelpunkte auf den Seiten des $\Delta\ ABC$ liegen und von denen die Endpunkte der in diese Seiten fallenden Durchmesser die Seiten AB, BC, CA innen und außen bezw. im Verhältnis $l : m$, $m : n$, $n : l$ teilen. Durch den Schnittkreis von zwei Kugeln geht auch die dritte. Den 4 verschiedenen Verhältnissen $l : m : n$ entsprechend werden also den Spitzen O des Dreikants $OABC$ 4 Kreise als geometrische Örter zugewiesen. (Diese Kreise bilden zu den „Apollonischen Kreisen" der Ebene die Erweiterung für den Raum). Sucht man noch den Proportionalitätsfaktor ρ, mit dem die Zahlen eines Verhältnisses zu multiplizieren sind, damit man die wahren Längen der Kanten erhält, so liefert irgend eine der Bestimmungsgleichungen 1., 2., 3. für ihn eine rein quadratische Gleichung. Den zwei entgegengesetzt gleichen Werten von ρ gemäß ergeben sich 8 Wurzeltripel l, m, n

*) S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie; Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Band VI, 2, S. 26 ff.

der Gleichungen des Problems, die sich paarweise nur in den Vorzeichen unterscheiden und sich mithin auf 4 ihrem absoluten Werte nach verschiedene Tripel reduzieren.*)

Auf jedem der genannten 4 Kreise gibt es also nur einen Punkt O und den zu ihm inbezug auf die Ebene $A\,B\,C$ symmetrischen als Standpunkt.

Wie sich eben zeigte, haben die Bestimmungsgleichungen sowohl positive wie auch negative Wurzeln. Die Bedeutung von negativen Kanten erkennt man, wenn man nicht das Dreikant $OABC$ (Fig. 2) mit den Winkeln α, β, γ allein betrachtet, sondern dasselbe durch Rückverlängerung seiner Kanten zu einem vollständigen Dreikant ergänzt. Haben die sich auf das Dreikant $OABC$ beziehenden Bestimmungsgleichungen beispielsweise die Wurzeln $+l$, $+m$, $-n$, wo l, m, n selbst absolute Werte sind, so haben die durch Vertauschung von $-n$ mit $+n$ aus ihnen hervorgehenden Gleichungen

$$a^2 = m^2 + n^2 + 2\,m\,n\cos\alpha$$
$$b^2 = n^2 + l^2 + 2\,n\,l\cos\beta$$
$$c^2 = l^2 + m^2 - 2\,l\,m\cos\gamma$$

die dem absoluten Betrage nach gleichen positiven Wurzeln $+l$, $+m$, $+n$. Statt dieser Gleichungen können wir die folgenden schreiben:

$$a^2 = m^2 + n^2 - 2\,m\,n\cos\,(180^0 - \alpha)$$
$$b^2 = n^2 + l^2 - 2\,n\,l\cos\,(180^0 - \beta)$$
$$c^2 = l^2 + m^2 - 2\,l\,m\cos\gamma,$$

und können sie mithin als die Bestimmungsgleichungen der Kanten für das Dreikant $OABC'$ mit den Winkeln $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, γ auffassen.

In analoger Weise wird für alle übrigen Fälle negativer Wurzeln gezeigt, daß sie als Strecken auf den Rückverlängerungen OA', OB', OC' der Kanten OA, OB, OC zu betrachten sind. Hiernach ergibt sich:

Es läßt sich das gegebene Dreieck ABC nicht 8-mal, nämlich den 8 Lösungen der Bestimmungsgleichungen gemäß, in das spezielle Dreikant der Sehstrahlen vom per-

*) Daß außer einem die Gleichungen 1., 2., 3. befriedigenden Wurzeltripel l, m, n auch noch $-l$, $-m$, $-n$ den Gleichungen genügt, ist ohne weiteres deshalb aus den Gleichungen ersichtlich, weil l, m, n in ihnen nur in Quadraten und in Produkten zu zweien auftreten.

spektivischen Zentrum nach den Fixpunkten einpassen, sondern 8-mal in die 8 verschiedenen Dreikante zusammen, die von den Sehstrahlen und ihren Rückverlängerungen über das Zentrum hinaus gebildet werden.

Da je 2 Lösungstripel sich nur in den Vorzeichen unterscheiden, so liegen die 8 Dreiecke $A\,B\,C$ paarweise symmetrisch zum Schnittpunkte O der 3 Kanten, sodaß wir im Grunde nur von 4 verschiedenen Lagen des gegebenen Dreiecks in dem vollständigen Dreikant bezw. umgekehrt, des Dreikants zu dem Dreieck zu sprechen haben. Die aus diesem 4-fachen Einpassen resultierenden Lagen der Spitzen der Dreikante gegenüber dem Dreieck der Fixpunkte geben nur zum Teile brauchbare Standpunkte im Sinne der vorausgegangenen photographischen Aufnahme der Punkte A, B, C, nämlich nur dann, wenn das Dreieck $A\,B\,C$ in das spezielle, gegebene Dreikant $OABC$ (Fig. 2) mit den Winkeln α, β, γ eingepaßt werden kann. Dies ist aber nur der Fall, wenn die Wurzeln l, m, n sämtlich positiv sind. Damit sind wir zu dem Resultate gekommen: Von den 8 der analytischen Formulierung der Aufgabe genügenden, paarweise bloß durch die Vorzeichen verschiedenen Wurzeltripel l, m, n führen nur die rein positiven Lösungen auf Standpunkte O, von denen aus die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks der Fixpunkte unter den gemessenen Winkeln α, β, γ erscheinen.

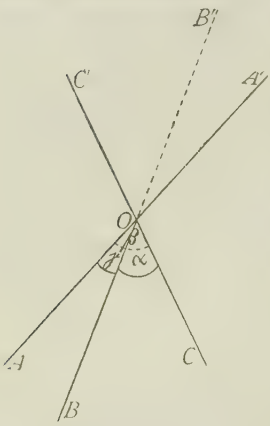


Fig. 2.

§ 2.

Die positiven Wurzeln der Bestimmungsgleichungen als Bedingung für die Brauchbarkeit der Standpunkte.

Mit Rücksicht auf die soeben erkannte Eigenschaft der positiven Lösungen der Bestimmungsgleichungen, die von uns gesuchten Standpunkte zu liefern, wollen wir uns mit der Frage befassen, ob sich die positiven Wurzeln von den übrigen absondern lassen.

Verstehen wir unter l, m, n die Koordinaten eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems, so stellen unsere Bestimmungs-

gleichungen 1., 2., 3. Flächen 2. Ordnung dar, Cylinder mit Parallelen zu den Koordinatenaxen als Erzeugenden. Die Leitlinien der Cylinder in den Koordinatenebenen sind auf ihren Mittelpunkt bezogene Kegelschnitte, sodaß also die Koordinatenaxen zugleich die Axen der Cylinder sind. Wegen der als Koeffizienten der Produkte von zwei Variabeln auftretenden cos-Funktionen sind die Leitkegelschnitte Ellipsen, die Flächen selbst mithin elliptische Cylinder. Sie schneiden sich in 8 Punkten, die wegen der bei den Cylindern inbezug auf den Koordinatenanfangspunkt herrschenden Symmetrie paarweise mit diesem in gerader Linie und von ihm gleich weit entfernt liegen, also paarweise dieselben, nur in den Vorzeichen verschiedenen Koordinaten haben. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind die Wurzeltripel des Gleichungssystems 1., 2., 3.

Die durch die Gleichungen 4. und 5. dargestellten Flächen sind Kegel 2. Ordnung, die ihre Spitzen im Anfangspunkte des Koordinatensystems haben und durch die Schnittkurven der elliptischen Cylinder 1. und 2. bezw. 2. und 3. gehen. Die 8 gemeinsamen Schnittpunkte der 3 Cylinder liegen auch auf den 4 gemeinsamen Erzeugenden der beiden Kegel, so zwar, daß auf jeder derselben ein Paar vom Anfangspunkte gleich weit entfernter Punkte sich befindet. Auf jedem der 8 Strahlen, in welche die 4 Kegelerzeugenden durch den Anfangspunkt zerlegt werden, liegt ein Schnittpunkt der 3 Cylinder. Unsere Absicht geht dahin, die Punkte ausfindig zu machen, die in dem Oktanten mit den positiven Koordinaten $+l$, $+m$, $+n$ liegen.

Da jeder der eben genannten 8 Strahlen nur innerhalb eines einzigen Oktanten verläuft, so sind die Vorzeichen der Koordinaten des auf ihm liegenden Cylinderschnittpunktes überall die nämlichen wie die irgend eines Punktes des Strahles. Es handelt sich also darum, irgend einen Punkt auf den Strahlen zu bestimmen, oder vielmehr nur auf denjenigen Strahlen, die in dem Oktanten $+l$, $+m$, $+n$ verlaufen. Dies gelingt dadurch, daß wir diese Strahlen mit einer Ebene schneiden und die Koordinaten der Schnittpunkte ermitteln. Zu diesem Zwecke wählen wir am geeignetsten eine Ebene, deren Gleichung sich dadurch ergibt, daß wir eine der 3 Koordinaten gleich einer positiven Konstanten setzen, etwa die Ebene $n = 1$. Sie schneidet die Kegel 4. und 5. nach den Kurven 2. Ordnung

6. $a^2 l^2 - b^2 m^2 - 2a^2 \cos\beta\, l + 2b^2 \cos\alpha\, m + a^2 - b^2 = 0$
7. $(b^2 - c^2) l^2 - 2b^2 \cos\gamma\, l\, m + b^2 m^2 + 2c^2 \cos\beta\, l - c^2 = 0.$

Die Kegelerzeugenden werden also in den 4 Schnittpunkten dieser beiden Kegelschnitte von der Ebene geschnitten. Die Anzahl der reellen Schnittpunkte ist zugleich die Anzahl der beiden Kegeln gemeinsamen reellen Erzeugenden und mithin die halbe Anzahl der reellen Schnittpunkte der elliptischen Cylinder, d. h. der reellen Lösungen der Bestimmungsgleichungen. Die Anzahl der Schnittpunkte, deren Koordinaten l und m positiv sind, ist auch gleich der Anzahl der gesuchten positiven Wurzeln der Bestimmungsgleichungen. Die Koordinaten eben dieser Schnittpunkte l', m', $n' = 1$ sind zu den wahren Längen l, m, n der vom Standpunkte nach den Fixpunkten gehenden Strecken proportional. Den Proportionalitätsfaktor σ, der die Verhältnisse $\frac{l}{l'}$, $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{1}$ angibt, finden wir aus irgend einer der Bestimmungsgleichungen 1., 2., 3. Tragen wir etwa in die Gleichung 1.

$$m = \sigma\, m' \text{ und } n = \sigma$$

ein, so entsteht für σ die Gleichung

$$a^2 = \sigma^2\ (m'^2 + 1 - 2\, m'\, u),$$

worin der Faktor $m'^2 + 1 - 2\, m'\, u = (m' - u)^2 + (1 - u^2)$ nur für $m' = u = 1$ zu 0 wird, sonst aber stets positiv ist. Von dieser Gleichung ist natürlich nur die positive Wurzel zu verwenden.

Somit ist die Aufsuchung der brauchbaren Standpunkte auf die Ermittelung der im Quadranten mit den positiven Koordinaten liegenden Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zurückgeführt.

Die Bestimmung der Schnittpunkte von 2 Kurven 2. Ordnung ist nun aber selbst wieder eine Aufgabe, welche die Auflösung einer Gleichung 4. Grades fordert. Diese Schwierigkeit umgehen wir dadurch, daß wir nun den analytischen Weg verlassen und uns einer graphischen Näherungsmethode bedienen. Wir werden, wovon eingehend der sich mit der praktischen Seite unserer Aufgabe befassende Teil (§ 5 u. § 6) noch handelt, die Konstruktion der Kegelschnitte punktweise und nur näherungsweise ausführen, die Schnittpunkte also auch nur angenähert erhalten und durch geeignete Korrektur der abgemessenen Koordinaten zu ihren wahren Werten gelangen.

An dieser Stelle wollen wir noch die durch die Gleichungen 6. und 7. definierten Kegelschnitte hinsichtlich ihrer Gattung unter-

uchen. Zu diesem Zwecke und für alle folgenden Ausführungen ollen wir die Abkürzungen gebrauchen:

$$u = \cos\alpha,\ v = \cos\beta,\ w = \cos\gamma.$$

ie Kegelschnitte haben demnach die Gleichungen

8. $K_1 \equiv a^2 l^2 - b^2 m^2 - 2a^2 v l + 2b^2 u m + a^2 - b^2 = 0$

9. $K_2 \equiv (b^2 - c^2) l^2 - 2b^2 w l m + b^2 m^2 + 2c^2 v l - c^2 = 0.$

ie Gleichung 8. $K_1 = 0$ können wir in die Form bringen:

$$K_1 \equiv a^2 (l - v)^2 - b^2 (m - u)^2 + a^2 (1 - v^2) - b^2 (1 - u^2) = 0,$$

oraus wir ersehen, daß $K_1 = 0$ für alle Werte der cos-Funktionen ine Hyperbel ist, die den Punkt $l = v,\ m = u$ zum Mittelpunkt, arallele zu den Koordinatenaxen als Axen und die durch die festen, on den jeweiligen Werten der cos-Funktionen unabhängigen Geraden

$$a l - b m = 0,\ a l + b m = 0$$

egebenen Richtungen zu Asymptotenrichtungen hat. Je nachdem

$$a^2 (1 - v^2) - b^2 (1 - u^2) \gtreqless 0, \text{ also } \frac{a}{b} \gtreqless \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

st die zur l-Axe parallele Hyperbelaxe reell, bezw. zerfällt die yperbel in die beiden Geraden

$$a (l - v) - b (m - u) = 0,\ a (l - v) + b (m - u) = 0,$$

ezw. ist die zur m-Axe parallele Hyperbelaxe reell.

Was die durch die Gleichung 9. dargestellten Kegelschnitte $K_2 = 0$ betrifft, so gehen sie unabhängig von den Werten der os-Funktionen sämtlich durch die 2 festen Punkte der m-Axe

$$l = 0,\ m = +\frac{c}{b} \text{ und } l = 0,\ m = -\frac{c}{b}.$$

ie Art, von welcher der einzelne Kegelschnitt ist, hängt hier wesentch von den speziellen Werten der cos-Funktionen ab. Wenn

$$\begin{vmatrix} b^2 - c^2 & -b^2 w & c^2 v \\ -b^2 w & b^2 & 0 \\ c^2 v & 0 & -c^2 \end{vmatrix} \gtreqless 0 \text{ bezw. } = 0$$

st, d. h. wenn

$$c^2 (1 - w^2) - c^2 (1 - v^2) \gtreqless 0 \text{ bezw. } = 0, \text{ also } \frac{b}{c} \gtreqless \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \text{ bezw. } \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

st, so ist $K_2 = 0$ eine eigentliche bezw. eine zerfallende Kurve . Ordnung. Je nachdem $\frac{b}{c} \sin\gamma \gtreqless 1$ ist, ist die eigentliche Kurve ine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

In den Fällen, wo der eine der beiden Kegelschnitte zerfällt.

wo also bei $K_1 = 0$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

oder bei $K_2 = 0$ $\quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$,

ist die Aufgabe der Aufsuchung der Schnittpunkte mit Zirkel und Lineal möglich. Zerfallen beide Kegelschnitte, so hat man überhaupt nur die Schnittpunkte von geraden Linien zu suchen.

In § 4 werden wir eine geeignete Methode kennen lernen, die uns in den Stand setzt, auf der Grundlage vorstehender Gleichungen die Orte des Raumes für die Spitzen der Dreikante zu finden, die sich durch elementare Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ermitteln lassen (vergl. Anm. zu § 4, S. 31).

Weitere Fälle, in denen wir auf die exakte analytische Weise die Aufgabe zu lösen vermögen, können im folgenden § 3 (S. 20) ermittelt werden.

§ 3.

Über die Lage der Standpunkte.

1. Die Winkel α, β, γ haben allgemeine Werte. Unsere 3 Bestimmungsgleichungen

$$a^2 = m^2 + n^2 - 2mnu$$
$$b^2 = n^2 + l^2 - 2nlv$$
$$c^2 = l^2 + m^2 - 2lmw$$

vermitteln eine gegenseitige Abhängigkeit der Größen l, m, n und u, v, w voneinander, die wir im folgenden einer näheren Untersuchung unterziehen wollen.

Da $l = \text{const.}$, $m = \text{const.}$, $n = \text{const.}$ Kugeln um die Punkte A, B, C mit den Werten der Konstanten als Radien definieren, so können wir diese Punkte zu Polen eines räumlichen tripolaren Koordinatensystems machen und die Festlegung eines Punktes in diesem Systeme durch die Kugeln treffen. Wenn sich die zu einem Koordinatentripel l, m, n gehörigen Kugeln schneiden, so ergeben sich als gemeinsame Schnittpunkte 2 Raumpunkte, die zur Ebene ABC symmetrisch liegen. Wegen dieser Symmetrie wollen wir im folgenden stets nur den Raum auf einer Seite der Ebene durch die Fixpunkte betrachten und demgemäß sagen, daß 3 Kugeln um die Pole den Schnittpunkt eindeutig festlegen.

In unserem Falle sind als Koordinaten des tripolaren Systems die Wurzeltripel der Bestimmungsgleichungen anzusehen. Da nun einerseits diese Wurzeltripel von positiven und negativen Werten l, m, n gebildet werden und da anderseits für die Radien der Kugeln zunächst nur positive Werte eine Bedeutung haben, so müssen wir entweder die Annahme machen, daß wir von zwei positiv und negativ gleich großen Werten den absoluten Betrag als Radius der Kugel wählen oder daß nur ein positiver Wert als Radius einer Kugel in Betracht kommen kann. Im ersten Falle definiert jedes Wurzeltripel l, m, n einen Punkt, sodaß sich 4 Punkte im tripolaren Raum konstruieren lassen, wenn ein Wertetripel u, v, w gegeben ist. Im zweiten Falle legen nur die Wurzeltripel mit rein positiven Werten, also die brauchbaren Standpunkte, einen Punkt fest, sodaß einem Wertetripel u, v, w nur die der Anzahl der brauchbaren Standpunkte gleiche Zahl von Punkten l, m, n entspricht. Da die erste Annahme allgemeiner ist, wollen wir sie dem Folgenden zugrunde legen.

Weiter wollen wir u, v, w als Koordinaten eines neuen rechtwinkligen Systems deuten. Dabei beschränken wir uns mit Rücksicht auf die Realität der Winkel α, β, γ auf den von den Ebenen $u = \pm 1$, $v = +1$, $w = +1$ eingeschlossenen Teil des Raumes. Die in den Bestimmungsgleichungen ausgedrückten Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten u, v, w und den tripolaren Koordinaten l, m, n vermitteln eine Abbildung der beiden Räume u, v, w und l, m, n ineinander. Wie wir bereits sahen, entsprechen einem Punkte u, v, w 4 Punkte l, m, n (auf einer Seite der Ebene $A\,B\,C$). Daß dieselben 4 Punkte l, m, n auch noch den weiteren 3 Punkten u, v, w entsprechen, deren Argumente α, β, γ zugleich mit denen des erstgedachten Punktes die Winkel desselben vollständigen Dreikants sind, wollen wir im Nachstehenden zeigen.

Die Gesamtheit der vollständigen Dreikante kann in zwei Klassen eingeteilt werden. Zu der einen Klasse gehören diejenigen vollständigen Dreikante, unter deren Einzeldreikanten eines mit 3 spitzen Winkeln sich befindet; die 3 anderen Einzeldreikante — die Paare der Scheiteldreikante sehen wir wegen der Gleichheit der Winkel als ein Dreikant an — haben dann je 1 spitzen und 2 stumpfe Winkel (vergl. Fig. 2). Die andere Klasse bilden diejenigen Dreikante, unter deren Einzeldreikanten eines mit 3 stumpfen Winkeln ist; die 3 anderen Einzeldreikante haben hier je 2 spitze

und 1 stumpfen Winkel. Verstehen wir unter α, β, γ spitze Winkel, so sind bei der Klasse I die Größen u, v, w ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) für 1 einfaches Dreikant sämtlich positiv, für die 3 anderen ist abwechselnd eine Größe positiv, die beiden anderen sind negativ. Innerhalb derselben Klasse ändern also die cos-Funktionen für die einzelnen Dreikante paarweise ihre Zeichen. Aus der in § 1, S. 9 durchgeführten Betrachtung über die Änderung der Vorzeichen von zweien der 3 cos-Funktionen, die durch die Änderung des Zeichens von einer der 3 Größen l, m, n hervorgerufen wird, folgt auch umgekehrt, daß die paarweise Änderung der Zeichen dieser cos-Funktionen nur die Zeichenänderung bei einer Wurzel verursacht, daß der absolute Wert der Wurzel hiervon aber nicht beeinflußt wird.

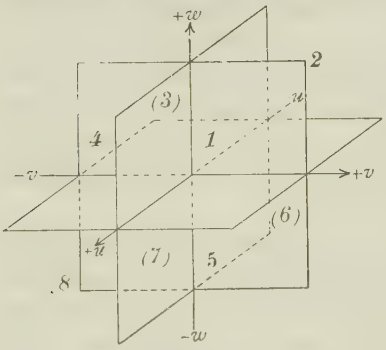


Fig. 3.

Fassen wir die 8 Wurzeltripel der Bestimmungsgleichungen, die sich für ein Winkeltripel der Klasse I bezw. II berechnen und die aus 4 verschiedenen sich in den Vorzeichen unterscheidenden Paaren bestehen, unter der Bezeichnung l_{I}, m_{I}, n_{I} bezw. l_{II}, m_{II}, n_{II} zusammen, so läßt sich das eben Ausgeführte in dem folgenden Schema ausdrücken, wo die 1. Rubrik die Winkel, die 2. ihre cos-Funktionen, die 3. die in der Figur 3 entsprechend numerierten Oktanten des uvw-Systems und die 4. Rubrik die Wurzeln der Bestimmungsgleichungen enthält. Diese letzte Rubrik läßt erkennen,

	1.	2.	3.	4.
Klasse I:	α, β, γ	u:+, v:+, w:+	Oktant 1	l_{I}, m_{I}, n_{I}
	α, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$	+ — —	„ 8	$-l_{\text{I}}$, m_{I}, n_{I}
	$180^0-\alpha$, β, $180^0-\gamma$	— + —	„ 6	l_{I}, $-m_{\text{I}}$, n_{I}
	$180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, γ	— — +	„ 3	l_{I}, m_{I}, $-n$
Klasse II:	$180^0-\alpha$, $180_0-\beta$, $180^0-\gamma$	u:—, v:—, w:—	Oktant 7	l_{II}, m_{II}, n_{II}
	$180^0-\alpha$, β, γ	— + +	„ 2	$-l_{\text{II}}$, m_{II}, n_{II}
	α, $180^0-\beta$, γ	+ — +	„ 4	l_{II}, $-m_{\text{II}}$, n_{II}
	α, β, $180^0-\gamma$	+ + —	„ 5	l_{II}, m_{II}, $-n_{\text{II}}$

daß die l, m, n Werte der 1. Zeile der Reihe nach in der 2., 3., 4. Zeile nur ihr Zeichen ändern, während eine Wertänderung nicht erfolgt.

Es bilden sich also in jeden von 4 Punkten des $u\,v\,w$-Raumes, welche dieselben absoluten Werte ihrer Koordinaten haben und derart in 4 verschiedenen Oktanten liegen, daß sie durch abwechselnde Spiegelung an der u- und v-Axe ineinander übergehen, die nämlichen 4 Punkte des $l\,m\,n$-Raumes, bezw. im Falle der 2. Annahme, die gleichen brauchbaren Standpunkte ab.

Wenn wir umgekehrt fragen, wie viele Punkte u, v, w einem Punkte l, m, n entsprechen, so kommt es wiederum auf die Voraussetzung an, ob nur positive oder auch negative Koordinaten einen Punkt l, m, n festlegen. Wenn wir annehmen, daß die tripolaren Koordinaten eines Punktes positiv sein müssen, so ist nur in einer einzigen Zeile der 4. Rubrik bei jeder Klasse ein rein positives Tripel vorhanden; der in der gleichen Zeile der 2. Rubrik stehende Punkt ist dann der einzige Bildpunkt des ersteren. Wenn aber die 8 Tripel $\pm l$, $\pm m$, $\pm n$ einen und denselben Punkt definieren sollen, so bilden sich in ihn sowie gleichzeitig noch in 3 weitere Raumpunkte dieselben 4 Punkte u, v, w ab. Wenn wir diese Überlegung nur auf die brauchbaren, durch positive Koordinaten bestimmten Standpunkte anwenden, so können wir sagen: In 1 Punkt des $l\,m\,n$-Raumes bildet sich auch nur 1 Punkt des $u\,v\,w$-Raumes ab.

Vom Gesichtspunkte der photographischen Praxis aus betrachtet, bedeutet dies nichts anderes, als daß das bei einer Aufnahme von einem Punkte O aus entstehende Dreikant $O\,A\,B\,C$ nach 3 Fixpunkten A, B, C eindeutig bestimmte Winkel an der Spitze hat.

Für die eben besprochene Abbildung der Räume ineinander läßt sich aber vollständige Eindeutigkeit erzielen mit Hilfe einer von Herrn Prof. Finsterwalder angegebenen Erweiterung der im Gebiete der komplexen Zahlen ähnlichen Zwecken dienenden Riemann'schen Flächen auf das Gebiet der reellen Zahlen*). Man

*) S. Finsterwalder, Über Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Dissertation. Tübingen 1886, S. 8.

S. Finsterwalder, Die von optischen Systemen größerer Öffnung und größeren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Abhandlungen der K. B. Akademie d. Wissensch. II. Klasse, XVII. Bd. III. Abt. § 4, S. 554.

denkt sich in jeden Raum soviele Hilfsräume gestellt, als die Vieldeutigkeit des Problems bezüglich der Punkte des Raumes beträgt. So sind in unserem Falle in den $u\ v\ w$-Raum 4 Hilfsräume mit Punkten l, m, n und in den $l\ m\ n$-Raum 1 Hilfsraum mit (den brauchbaren Stand-)Punkten u, v, w zu stellen. Mit jedem Punkte u, v, w decken sich 4 in je einem Hilfsraum befindliche Punkte l, m, n; die nämlichen 4 Punkte l, m, n decken sich aber gleichzeitig mit je einem Punkte in denjenigen 4 Oktanten, welche zu einer der beiden Klassen von Dreikanten gehören. Mit einem Punkte l, m, n deckt sich nur ein Punkt des Hilfsraumes.

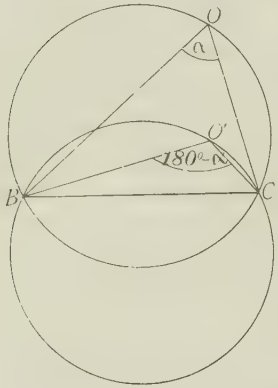


Fig. 4.

Die Abbildung des $u\ v\ w$-Raumes in den $l\ m\ n$-Raum, die also eindeutig erfolgt, wollen wir noch genauer untersuchen. Sie gewährt uns eine Anschauung von der Lage der Standpunkte gegenüber den Fixpunkten.

Im tripolaren Koordinatensystem stellen die Bestimmungsgleichungen Cykliden dar, die durch Rotation von Kreisen, den geometrischen Örtern der Punkte in der Ebene, von denen aus die Dreiecksseiten BC, CA, AB unter den Winkeln α, β, γ erscheinen, um diese Seiten entstehen. Die Schnittpunkte dieser 3 Cykliden miteinander sind unmittelbar die Standpunkte. Wir wollen an einer solchen Cyklide zwei Schalen unterscheiden, von denen Fig. 4 einen ebenen Schnitt durch die Rotationsaxe zeigt. Die eine Schale $B\,O\,C$ sei die „äußere", die andere $B\,O'\,C$ die „innere". Der charakteristische Unterschied zwischen beiden Schalen besteht darin, daß die Rotationssehne von den Punkten der äußeren Schale unter spitzen, von denen der inneren Schale unter stumpfen Winkeln erscheint. Da den spitzen Winkeln α, β, γ die cos-Funktionen $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$ und den stumpfen die Funktionen $u < 0$, $v < 0$, $w < 0$ entsprechen, so bilden sich die Punkte $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$ in die äußeren, die Punkte $u < 0$, $v < 0$, $w < 0$ in die inneren Schalen ab. Die Koordinatenebenen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ bilden sich in die Grenzflächen zwischen den äußeren und inneren Schalen, also in die Kugeln mit BC, CA, AB als Durchmessern, ab. Endlich bilden sich die Ebenen $u = -1$, $v = -1$, $w = -1$ in die endlichen Strecken BC, CA, AB, sowie je in die unendlich ferne Ebene des $l\,m\,n$-Raumes ab.

Beschreibt man die Kugeln mit den Seiten des $\Delta\, A\, B\, C$ als Durchmessern, so wird der Raum infolge der Durchdringungen der Kugeln in 8 Teilräume eingeteilt, welche den von den Koordinatenebenen gebildeten Oktanten des $u\, v\, w$-Raumes entsprechen. (Fig. 5 stellt diese Einteilung des $l\, m\, n$-Raumes durch Kugeln um die Seiten des $\Delta\, A\, B\, C$ für den Raum auf einer Seite der Ebene dieses Dreiecks dar).

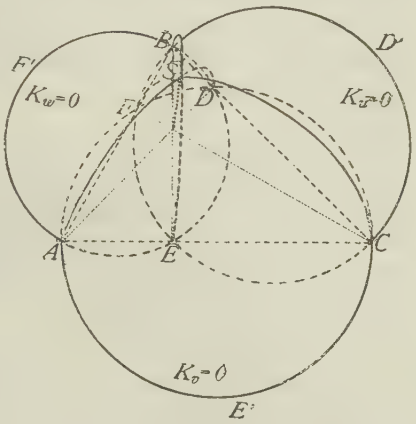


Fig. 5.

Aus der Lage der äußeren und inneren Cyklidenschalen gegenüber den Kugeln ergibt sich die folgende Abbildung der Oktanten in die durch die Kugeln entstehenden Teilräume, wobei wir der Kürze halber mit $K_u = 0$, $K_v = 0$, $K_w = 0$ die den Koordinatenebenen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ entsprechenden Kugeln um BC, CA, AB verstehen wollen:

Klasse I. Oktant 1 $(u : +, v : +, w : +)$ bildet sich in den Raum außerhalb $K_u = 0, K_v = 0, K_w = 0$ ab:

„ 8 $(u : +, v : -, w : -)$ bildet sich in den Raum $SAEFS$
außerhalb $K_u = 0$,
innerhalb $K_v = 0$, $K_w = 0$ ab;

„ 6 $(u : -, v : +, w : -)$ bildet sich in den Raum $SBFDS$
außerhalb $K_v = 0$,
innerhalb $K_u = 0$, $K_w = 0$ ab;

„ 3 $(u : -, v : -, w : +)$ bildet sich in den Raum $SCDES$
außerhalb $K_w = 0$,
innerhalb $K_u = 0$, $K_v = 0$ ab.

Klasse II. Oktant 7 $(u : -, v : -, w : -)$ bildet sich in den Raum $SDEFS$
innerhalb $K_u = 0$, $K_v = 0$, $K_w = 0$ ab;

„ 2 $(u : -, v : +, w : +)$ bildet sich in d. Raum $SBD'CDB$
innerhalb $K_u = 0$,
außerhalb $K_v = 0$, $K_w = 0$ ab:

„ 4 $(u : +, v : -, w : +)$ bildet sich in d. Raum $SCE'AEC$
innerhalb $K_v = 0$,
außerhalb $K_u = 0$, $K_w = 0$ ab;

Klasse II. Oktant 5 ($u:+,\ v:+,\ w:-$) bildet sich in d. Raum $SAF'BFA$
innerhalb $K_w = 0$,
außerhalb $K_u = 0$, $K_v = 0$ ab.

Der Wert der Untersuchung dieser Abbildung besteht darin, daß sie es ermöglicht, einen bestimmt begrenzten Teil des Raumes zu bezeichnen, in dem die brauchbaren Standpunkte liegen, die zu den gegebenen Größen u, v, w gehören.

2. Die Winkel α, β, γ haben spezielle Werte. Aus der soeben besprochenen Abbildung erkennt man weitere Fälle (vergl. S. 14), in denen die Möglichkeit der direkten Lösung des Problems besteht.

Für ein vollständig rechtwinkliges Dreikant $OABC$ gibt es nur einen Standpunkt, den Schnittpunkt S der 3 Kugeln über AB, BC, CA als Durchmessern.

Für ein Dreikant mit 2 rechten Winkeln liegt der Standpunkt auf dem Schnittkreise von je 2 Kugeln, dessen Ebene auf der Ebene ABC senkrecht steht und der eine Höhe des ΔABC als Durchmesser hat. Je nachdem α, β oder γ der von 90^0 verschiedene Winkel des Dreikants ist, ist der Kreis $\overset{\frown}{ASD}$, $\overset{\frown}{BSE}$ oder $\overset{\frown}{CSF}$ der Ort des Standpunktes. Wenn dabei dieser von 90^0 verschiedene Winkel von 180^0 an abnimmt, gleich 90^0 und schließlich demjenigen Winkel des ΔABC gleich wird, durch dessen Spitze der betreffende Kreis der Standpunkte hindurchgeht, so durchläuft der Standpunkt diesen Kreis vom Fußpunkt der Höhe an über S nach der Ecke des Dreiecks. Ist der Winkel des Dreikants kleiner als der Winkel des Dreiecks an dieser Ecke, so gibt es keinen Standpunkt für ein solches Dreikant. Für die übrigen Dreikante, für die Standpunkte vorhanden sind, gibt es stets nur eine einzige Lage.

Diese beiden Fälle lassen sich auch rechnerisch erledigen, wenn wir die Ausführungen des § 2 zugrunde legen.

Im ersten Falle ist in den Bestimmungsgleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ zu setzen, im zweiten bestehen noch zwei von diesen Gleichungen. Diese seien z. B. $v = 0$ und $w = 0$. Der Kegelschnitt $K_2 = 0$, in dessen Gleichung u nicht vorkommt, ist in beiden Fällen der gleiche, nämlich die auf den Mittelpunkt und die Axen bezogene Ellipse

$$K_2 \equiv (b^2 - c^2)\, l^2 + b^2\, m^2 - c^2 = 0\,;$$

der Kegelschnitt $K_1 = 0$ ist das eine Mal

$K_1 \equiv b^2 m^2 - a^2 l^2 - (a^2 - b^2) = 0$, das andere Mal
$K_1 \equiv b^2 (m - u)^2 - a^2 l^2 - (a^2 - (1 - u^2) b^2) = 0.$

Diese Gleichungen stellen Hyperbeln dar, die auf den Mittelpunkt und im ersten Falle auch auf die Axen bezogen sind, während im zweiten Falle die m-Axe mit einer Hyperbelaxe zusammenfällt und die l-Axe zu der anderen parallel ist. Aus der Lage der beiden Kegelschnitte ist ohne weiteres ersichtlich, daß ihre Schnittpunkte in je einem anderen Quadranten liegen. Im übrigen lassen sich diese Schnittpunkte genau angeben, da sich quadratische Gleichungen für die einzelnen Koordinaten herstellen lassen. Damit ist gezeigt, daß sich das Problem für diese Fälle analytisch einfach durchführen läßt und daß es wegen des einzigen Schnittpunktes von $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ im Quadranten $+l$, $+m$ nur einen brauchbaren Standpunkt gibt.

§ 4.

Der gefährliche Ort für die Lage der Standpunkte.

In § 2 haben wir die Bestimmung der Standpunkte auf die Aufsuchung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ zurückgeführt und erkannt, daß die Schnittpunkte mit rein positiven Koordinaten die brauchbaren Standpunkte liefern. Da sich nun einerseits wegen der nur angenäherten Bestimmung der Schnittpunkte durch ein graphisches Verfahren der Fall, wo zwei Schnittpunkte sehr nahe zusammengerückt, aber noch getrennt sind, von dem anderen Falle, wo sie sich bereits vereinigt haben, nur schwer oder überhaupt nicht unterscheiden läßt, und da andererseits gerade der letztere Fall besonderes Interesse bietet („gefährlicher Ort"), so wollen wir uns im folgenden mit seiner näheren Untersuchung beschäftigen.

Wenn zwei Schnittpunkte der Kegelschnitte zusammenfallen, so fallen wegen der eindeutigen Abhängigkeit der Standpunkte von diesen Schnittpunkten auch zwei Standpunkte zusammen. Zusammenfallende Standpunkte können wir als unendlich benachbarte betrachten, also als Punkte mit den Koordinaten l, m, n und $l + dl$, $m + dm$, $n + dn$ im tripolaren System. Wir wollen wissen, für welche Werte der cos-Funktionen u, v, w die Bestimmungsgleichungen des Problems solche benachbarte Punkte liefern und stellen demgemäß mit Rücksicht auf die

durch diese Gleichungen definierte Abbildung der Räume $u\ v\ w$ und $l\ m\ n$ ineinander die Fragen:

Welchen Ort erfüllen die Punkte u, v, w, denen zwei unendlich benachbarte Punkte l, m, n und $l+dl$, $m+dm$, $n+dn$ entsprechen?

Welchen Ort erfüllen die Punkte l, m, n, die gleichzeitig mit ihren Nachbarpunkten $l+dl$, $m+dm$, $n+dn$ den Gleichungen des Problems genügen?

Außer den Bestimmungsgleichungen

$$1.\ m^2+n^2-2mnu-a^2=0$$
$$2.\ n^2+l^2\ -2nlv\ -b^2=0$$
$$3.\ l^2\ +m^2-2lmw\ -c^2=0$$

müssen noch die durch Differentiation nach l, m, n aus ihnen hervorgehenden Gleichungen bestehen:

$$1^a.\ (m-nu)\ dm+(n\ -mu)\,dn\ =0$$
$$2^a.\ (n\ -lv)\ \ dn+(l\ -nv)\ \ dl\ \ =0$$
$$3^a.\ (l\ -mw)\,dl\ \ +(m-lw)\ \ dm=0.$$

Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichungen ist:

$$4.\quad \begin{vmatrix} 0 & m-nu & n-mu \\ l-nv & 0 & n-lv \\ l-mw & m-lw & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen 1., 2., 3., 4.

a) l, m, n, so erhält man den Ort der Punkte u, v, w, die auf doppelt zählende Standpunkte führen;

b) u, v, w, so erhält man den Ort dieser doppelt zählenden, zusammenfallenden Standpunkte.

Diese geometrischen Örter sind Flächen in den uvw- und lmn-Räumen, weil sich als Resultat der Elimination von 3 Parametern aus den 4 Gleichungen nur eine Gleichung für jeden Ort ergibt. Die beiden Flächen haben für die Räume, in denen sie liegen, eine hervorragende Bedeutung: sie trennen die Gesamtheit der Punkte in Teile, die sich inbezug auf das vorliegende Problem prinzipiell verschieden verhalten.

Wir haben (S. 18) in den uvw-Raum für jeden der 4 einem Punkte dieses Raumes entsprechenden Punkte l, m, n einen Hilfsraum gestellt. Für die Punkte der Fläche, die wir im Falle a) im uvw-Raum erhalten, fallen 2 Punkte l, m, n zusammen und es hängen mithin längs dieser Fläche 2 Hilfsräume miteinander zu-

sammen (nach Riemann: sie sind längs der Fläche verzweigt); an verschiedenen Teilen der Fläche hängen auch verschiedene Hilfsräume zusammen. Die anderen längs dieser Teile nicht zusammenhängenden Hilfsräume erstrecken sich durch die Fläche hindurch in den durch sie getrennten Teil des Raumes, während die zusammenhängenden Hilfsräume in diesem Raumteile verschwinden: in diesem Teile des Raumes sind also von den 4 Bildpunkten eines Originalpunktes nur mehr 2 reell vorhanden. Wegen dieser Eigenschaft, die Grenze zwischen reellen und imaginären Punkten zu bilden, bezeichnet man die Fläche als „Discriminantenfläche".

Die Fläche, die sich im Falle b) ergibt, wird mit Rücksicht darauf, daß ihre Punkte „eine Verschiebung um ein Unendlichkleines erster Ordnung in irgend einer Richtung erfahren, sobald die Bestimmungsstücke nur um ein Unendlichkleines zweiter oder höherer Ordnung geändert werden"*) ein „gefährlicher Ort" für die Standpunkte genannt.

Was nun die Ausführung der Elimination von l, m, n anlangt, so begegnet sie erheblichen Schwierigkeiten, die auch dadurch nicht vermindert werden, daß man die Gleichung

4. $(l-m\,w)(m-n\,u)(n-l\,v)+(m-l\,w)(n-m\,u)(l-n\,v)=0$

mit Hilfe der Bestimmungsgleichungen 1., 2., 3., zunächst auf die trilineare Form bringt:

$$2\,l\,m\,n(1-u^2-v^2-w^2+2\,u\,v\,w)+l\,a^2\,(v\,w-u)+m\,b^2\,(w\,u-v)+n\,c^2\,(u\,v-w)=0.$$

Man kann indeß die Gleichung der Discriminantenfläche in expliciter Form angeben, wenn man zu ihrer Aufstellung eine andere Methode benützt. Die Herren Finsterwalder und Scheufele stellen die kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung für das Verhältnis zweier Kantenlängen (vergl. S. 8) auf:**)

$$\lambda^3 c^2[c^2(1-u^2)-a^2(1-w^2)]+\lambda^2[a^2(b^2-a^2)(1-w^2)-c^2(2b^2+c^2)(1-u^2)+2a^2c^2(1-u\,v\,w)]+\lambda[a^2(a^2-c^2)(1-v^2)+b^2(b^2+2c^2)(1-u^2)-2a^2b^2(1-u\,v\,w)]+b^2[a^2(1-v^2)-b^2(1-u^2)]=0.$$

Schreibt man die Gleichung kurz

$$A\lambda^3+B\lambda^2+C\lambda+D=0,$$

*) S. Finsterwalder, Grundlagen der Photogram. S. 27.

**) S. Finsterwalder und W. Scheufele, Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Sitz.-Berichte d. math.-phys. Klasse der K. B. Akad. der Wissensch., Bd. XXXIII, Heft IV, S. 596.

so ist die Discriminantenfläche durch die Gleichung:

$$[27A^2D + B(2B^2 - 9AC)]^2 + 4(3AC - B^2)^3 = 0$$

gegeben. Da die Koeffizienten A und D von der 2., B und C von der 3. Ordnung in den Koordinaten u, v, w sind, erkennt man, daß die Discriminantenfläche selbst von der 12. Ordnung ist und eine Kurve von der $9 \cdot 6$. Ordnung als Rückkehrkurve hat.

Wir wenden uns nun zur Elimination von u, v, w. Die direkte Anwendung der Gleichungen 1., 2., 3. auf die Gleichung 4. liefert als Resultat der Elimination die Gleichung des gefährlichen Ortes:

$$5.\ (a^2 + m^2 - n^2)(b^2 + n^2 - l^2)(c^2 + l^2 - m^2)$$
$$+ (a^2 - m^2 + n^2)(b^2 - n^2 + l^2)(c^2 - l^2 + m^2) = 0.$$

Wir wollen die Gestalt dieser Fläche im tripolaren Koordinatensystem untersuchen. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir der Kürze halber

$a^2 + m^2 - n^2 = 0$ mit I, $b^2 + n^2 - l^2 = 0$ mit II, $c^2 + l^2 - m^2 = 0$ mit III,
$a^2 - m^2 + n^2 = 0$ " IV, $b^2 - n^2 + l^2 = 0$ " V, $c^2 - l^2 + m^2 = 0$ " VI.

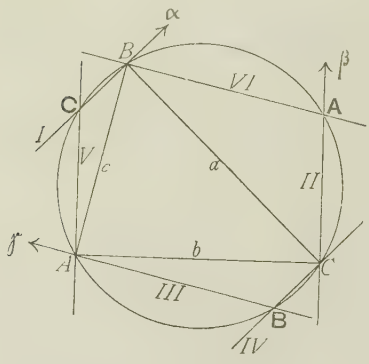


Fig. 6.

Die durch diese Gleichungen dargestellten Flächen haben die Eigenschaft, daß die Differenz der Quadrate der Entfernungen ihrer Punkte von je 2 Ecken des ΔABC konstant und gleich dem Quadrate der Dreiecksseite zwischen diesen Ecken ist. Sie sind demnach die Ebenen, die in A, B, C senkrecht auf den Dreiecksseiten stehen. (Die Fig. 6 zeigt den Schnitt der Ebene ABC mit den Ebenen I bis VI und außerdem den Umkreis des ΔABC). Auf dem gefährlichen Ort 5. liegen also die folgenden zur Ebene ABC in den beigefügten Punkten senkrecht stehenden 9 Geraden:

(I, IV) in α, (I, V) in **C**, (I, VI) in B;
(II, IV) „ C, (II, V) „ β, (II, VI) „ **A**;
(III, IV) „ **B**, (III, V) „ A, (III, VI) „ γ.

Dabei liegen die Punkte α, β, γ als Schnittpunkte paralleler Geraden auf der unendlich fernen Geraden der Ebene ABC.

In den Vierecken $AB\mathbf{A}C$, $BC\mathbf{B}A$, $CA\mathbf{C}B$ sind zwei gegenüberliegende Winkel Rechte; also liegen die 3 Schnittpunkte **A**, **B**, **C** der Ebene $A\ B\ C$ mit den Geraden (II, VI), (III, IV), (I, V)

auf dem Kreis durch A, B, C. Die 6 im Endlichen liegenden Geraden des gefährlichen Ortes gehören demnach dem Kreiscylinder an, der auf der Ebene ABC senkrecht steht und durch A, B, C hindurchgeht.

Unter Einführung eines variablen Parameters λ trennen wir nun die Gleichung 5. in die beiden Gleichungen:

5^a. $\qquad \lambda(a^2+m^2-n^2) = -(a^2-m^2+n^2)$

5^b. $(b^2+n^2-l^2)\ (c^2+l^2-m^2) = \lambda(b^2-n^2+l^2)\ (c^2-l^2+m^2)$.

Jede Gleichung stellt ein Flächenbüschel dar. Die Flächen der beiden Büschel sind eindeutig aufeinander bezogen. Die Gleichung 5^a, auch geschrieben

$$m^2-n^2+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}a^2=0,$$

ist von der Form der Gleichungen *I* bis *VI*. Die Art der durch sie dargestellten Fläche erkennt man sofort, wenn man durch BC (s. Fig. 7) eine Ebene legt, BC als ξ-Axe und die Senkrechte zu ihr in B als η-Axe eines Koordinatensystems nimmt. Bei dem Übergang vom tripolaren $m\ n$-System zum rechtwinkligen System $\xi\eta$ wird die Gleichung 5^a. übergeführt in

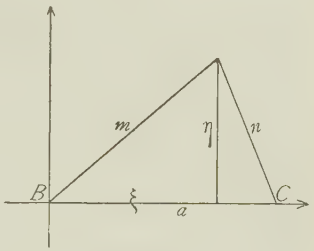


Fig. 7.

$$(\xi^2+\eta^2)-[(a-\xi)^2+\eta^2]+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}a^2=0$$

oder in $\qquad \xi=-\frac{a}{\lambda-1}$,

d. h. die Gleichung 5^a. stellt für die Parameterwerte λ die zu BC im jeweiligen Abstande $-\frac{a}{\lambda-1}$ von B senkrechten Ebenen dar.

Um ferner die Art der Flächen 5^b. zu erkennen, zerlegen wir die Gleichung dieser Flächen unter Einführung eines weiteren Parameters μ in das Gleichungspaar:

5^c. $\mu(b^2+n^2-l^2) = \lambda(b^2-n^2+l^2)$

5^d. $c^2+l^2-m^2 = \mu(c^2-l^2+m^2)$.

Wenn wir zunächst λ als Konstante und nur μ als variablen Parameter betrachten, so stellt jede Gleichung in Analogie mit der Gleichung 5^a. Ebenen dar, und zwar 5^c. die zu CA senkrechten

Ebenen im Abstande $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot b$ von C und 5^d. die zu AB senkrechten Ebenen im Abstande $\frac{\mu}{\mu+1} \cdot c$ von A. Diese beiden Scharen von Parallelebenen können als Ebenenbüschel mit parallelen, nämlich zur Ebene ABC senkrechten unendlich fernen Axen, den Geraden *(II, V)* und *(III, VI)* in β bezw. γ aufgefaßt werden. Die beiden Büschel sind zufolge der eindeutigen Zuordnung der zwei Ebenen mit dem gleichen Parameterwerte μ projektiv aufeinander bezogen. Ihr Erzeugnis, also die Fläche 5^b., ist mithin ein auf der Ebene ABC senkrechter Cylinder von der zweiten Ordnung und zwar ein durch die unendlich fernen Axen des Parallelebenenbüschels gehender hyperbolischer Cylinder. Betrachtet man jetzt auch noch λ als variablen Parameter, so definiert die Gleichung 5^b. das Büschel von hyperbolischen Cylindern, das die Geraden *(II, V)*, *(III, VI)*, *(II, VI)*, *(III, V)* in β, γ, **A**, A bezw. zu Grundgeraden hat. Das Erzeugnis dieses Flächenbüschels 5^b. und des Parallelebenenbüschels 5^a., also die Fläche 5., ist ein zur Ebene ABC senkrechter Cylinder 3. Ordnung. Von ihm sind bereits 9 Erzeugende, die Geraden in A, B, C; **A**, **B**, **C**; α, β, γ bekannt. Haben nun 9 Erzeugende eines Cylinders 3. Ordnung allgemeine Lage, so bestimmen sie den Cylinder eindeutig; haben sie aber, wie in unserem Falle, die spezielle Lage, daß das Büschel von Cylindern 3. Ordnung, das man durch 8 parallele Geraden legen kann und das selbst noch eine weitere gemeinsame Gerade bestimmt, eben die bekannten 9 Geraden als diese Grundgeraden hat, so wird der Cylinder durch diese 9 Geraden nicht eindeutig festgelegt; er muß vielmehr noch aus dem Büschel ausgeschieden werden. Im vorliegenden Falle bilden die bekannten 9 Erzeugenden die Grundgeraden eines Büschels, von dem wir 3 Flächen sofort angeben können: den Kreiscylinder durch die 6 Geraden in A, B, C; **A**, **B**, **C** in Verbindung mit der unendlich fernen Ebene durch die 3 Geraden in α, β, γ; sodann die 3 Ebenen *I*, *II*, *III* durch die Geraden in B, **C**, α bezw. C, **A**, β bezw. A, **B**, γ; endlich die 3 Ebenen *IV*, *V*, *VI* durch die Geraden in C, **B**, α bezw. A, **C**, β bezw. B, **A**, γ. Daraus ersehen wir, daß unsere 9 Erzeugenden tatsächlich keinen bestimmten Cylinder definieren.

Um nun den durch die Gleichung 5. repräsentierten Cylinder zu erhalten, suchen wir eine weitere 10. Erzeugende auf ihm zu

finden und ihn so eindeutig zu bestimmen. Zu dem Ende schneiden wir die Fläche etwa mit der Ebene $m = n$, die auf BC im Mittelpunkt der Strecke BC senkrecht steht. Infolge dieser Gleichung reduziert sich die Gleichung 5. auf:

$$(b^2 + m^2 - l^2)(c^2 - l^2 - m^2) + b^2 - m^2 + l^2)(c^2 - l^2 + m^2) = 0,$$

oder auf $$(l^2 - m^2)^2 - b^2 c^2 = 0.$$

Die beiden Flächen $l^2 - m^2 = \pm b c$, deren Schnittkurven mit der Ebene $m = n$ also auf dem Cylinder 5. liegen, sind, wie wir ähnlich von den Flächen 5^a., 5^c., 5^d. nachgewiesen haben, Ebenen, die auf AB in den Abständen $\frac{+b+c}{2}$ von A senkrecht stehen. Es

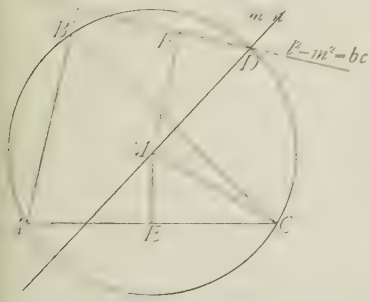


Fig. 8.

genügt, die Schnittgerade der Ebene $m = n$ mit der einen von diesen beiden Ebenen zu ermitteln, etwa mit der Ebene $l^2 - m^2 = b c$. Zeichnet man den Schnitt der Ebenen $m = n$ und $l^2 - m^2 = b c$ mit der Ebene des ΔABC (Fig. 8), so erkennt man, daß die Senkrechte zu AC im Mittelpunkte E der Strecke AC die Gerade $m = n$ im Mittelpunkte M des Umkreises des ΔABC schneidet und daß die Senkrechte MF von M auf die Gerade $l^2 - m^2 = b c$ die Länge $\frac{b}{2}$ hat. Die Dreiecke MFD und CEM sind also kongruent, woraus folgt, daß MD gleich dem Radius CM des Umkreises des ΔABC ist. Somit liegt die gesuchte 10. Erzeugende des Cylinders 3. Ordnung auf dem Kreiscylinder, der auf der Ebene ABC senkrecht steht und durch A, B, C hindurchgeht. Da wir bereits gesehen haben, daß dieser Kreiscylinder zusammen mit der unendlich fernen Ebene dem Büschel von Cylindern 3. Ordnung angehört, das auch die von uns gesuchte Fläche 5. enthält, so sind wir zu dem Resultate gekommen:

Der gefährliche Ort für die Lage der Standpunkte wird von dem Kreiscylinder, der durch die Fixpunkte A, B, C geht und auf der Ebene dieser Punkte senkrecht steht, in Verbindung mit der unendlich fernen Ebene gebildet. Die unendlich ferne Ebene als Ort von Standpunkten für

photographische Aufnahmen hat keine weitere Bedeutung. Wir reduzieren demgemäß den Begriff des gefährlichen Ortes auf den Kreiscylinder, den wir den „gefährlichen Cylinder" nennen wollen.

In gleicher Weise, wie die Bedingung für eine Doppelwurzel der Bestimmungsgleichungen den Ort von 2 zusammenfallenden Standpunkten ergibt, liefert die Bedingung für eine dreifache Wurzel den Ort von 3 zusammenfallenden Standpunkten. Um diese Bedingung zu finden, hat man auch noch die Gleichung 4. zu differentiieren. Man erhält:

$$\begin{aligned}4^{a}.\quad & dl\,[(m-nu)(n-lv)+(m-lw)(n-mu)\\ & -v(l-mw)(m-nu)-w(l-nv)(n-mu)]\\ & +dm\,[(n-lv)(l-mw)+(n-mu)(l-nv)\\ & -w(m-nu)(n-lv)-u(m-lw)(l-nv)]\\ & +dn\,[(l-mw)(m-nu)+(l-nv)(m-lw)\\ & -u(n-lv)(l-mw)-v(n-mu)(m-lw)]=0.\end{aligned}$$

Eliminiert man aus den 3 Gleichungen 1., 2., 3., aus zweien der 3 Gleichungen $1^{a}.$, $2^{a}.$, $3^{a}.$ und aus der Gleichung $4^{a}.$ einmal l, m, n, dl, dm, dn, sodann u, v, w, dl, dm, dn, so erhält man im ersteren Falle in Verbindung mit der Diskriminantenfläche die Kurve auf ihr, deren Punkte u, v, w 3 zusammenfallende Standpunkte liefern, im letzteren Falle in Verbindung mit dem gefährlichen Cylinder die Kurve auf ihm, welche der geometrische Ort von dreifach zählenden Standpunkten ist.

Aus $2^{a}.$, $3^{a}.$, $4^{a}.$ — die letztere Gleichung für den Augenblick $dl\cdot L+dm\cdot M+dn\cdot N=0$ geschrieben — ergibt sich zunächst als Resultat der Elimination der Differentiale dl, dm, dn:

$$6.\quad \begin{vmatrix} L & M & N \\ l-nv & 0 & n-lv \\ l-mw & m-lw & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Durch Entwicklung der Determinante und unter Benützung der Gleichung 4. läßt sich die folgende Gleichungsform herstellen:

$$\begin{aligned}7.\quad & (m-lw)\cdot[(m-lw)(l-nv)^{2}+(l-nv)(l-mw)(m-nu)\\ & -(n-lv)^{2}(m-nu)]\\ & +(n-lv)\cdot[(n-lv)(l-mw)^{2}+(l-mw)(n-mu)(l-nv)\\ & -(m-lw)^{2}(n-mu)]\\ & +(m-lw)(n-lv)\cdot[-2u(l-nv)(l-mw)+2v(l-mw)\\ & (m-nu)+2w(n-mu)(l-nv)]=0.\end{aligned}$$

Was nun die Elimination von l, m, n aus 1., 2., 3. und 7. betrifft, so müssen wir auf ihre Ausführung wohl verzichten, da in-

folge der hohen Ordnung der Gleichung 6. bezw. 7. die Schwierigkeiten, die bereits bei der früher schon beabsichtigten Elimination von l, m, n aus 1., 2., 3., 4. bestanden, noch gewachsen sind.

Die Elimination von u, v, w hingegen läßt sich sofort vollziehen, indem man durch Multiplikation der Gleichung 7. bezw. der einzelnen in ihren Summanden vorkommenden Faktoren mit geeigneten Potenzen von l, m, n die Produkte mnu, nlv, lmw herstellt und diese aus den Gleichungen 1., 2., 3. ersetzt. Hierdurch entsteht das folgende Eliminationsresultat:

8. $(m^2-l^2+c^2)[n^2(m^2-l^2+c^2)(l^2-m^2+b^2)^2+n^2(l^2-n^2+b^2)(l^2-m^2+c^2)(m^2-n^2+a^2)-l^2(n^2-l^2+b^2)^2(m^2-n^2+a^2)]$
$+(n^2-l^2+b^2)[m^2(n^2-l^2+b^2)(l^2-m^2+c^2)^2+m^2(l^2-m^2+c^2)(n^2-m^2+a^2)(l^2-n^2+b^2)-l^2(m^2-l^2+c^2)^2(n^2-m^2+a^2)]$
$+(m^2-l^2+c^2)(n^2-l^2+b^2)[-(m^2+n^2-a^2)(l^2-n^2+b^2)(l^2-m^2+c^2)+(n^2+l^2-b^2)(l^2-m^2+c^2)(m^2-n^2+a^2)$
$-(l^2+m^2-c^2)(n^2-m^2+a^2)(l^2-n^2+b^2)]-0.$

Denkt man sich diese zwischen den tripolaren Koordinaten bestehende Gleichung in die Koordinaten eines rechtwinkligen Systems umgeschrieben, so sind die aus den Ebenengleichungen I bis VI bekannten Terme durch lineare Ausdrücke zu ersetzen, während für l^2, m^2, n^2 sowie für $m^2+n^2-a^2$, $l^2+n^2-b^2$, $l^2+m^2-c^2$ quadratische Ausdrücke zu substituieren sind, welche, gleich Null gesetzt, Kugeln definieren. Demnach ist die Fläche 8. von der 6. Ordnung. Die Schnittkurve dieser Fläche 6. Ordnung mit dem gefährlichen Cylinder ist der gesuchte Ort für dreifache Standpunkte.

Wie man sieht, gehört die auf dem gefährlichen Cylinder 5. liegende und durch **A** gehende Gerade (II, VI) mit den Gleichungen

$$m^2-l^2+c^2=0,\quad n^2-l^2+b^2=0$$

auch der Fläche 8. an. Sie ist also ein Bestandteil des Ortes von 3 zusammenfallenden Standpunkten.

In genau der gleichen Weise läßt sich zeigen, daß auch die Erzeugenden des gefährlichen Cylinders durch **B** und **C** Orte sind, auf denen die Vereinigung von 3 Standpunkten stattfindet; man hat nämlich die Elimination von dl, dm, dn das eine Mal aus $1^a.$, $2^a.$, $4^a.$ und das andere Mal aus $1^a.$, $3^a.$, $4^a.$ zu vollziehen.

Ob diese 3 Erzeugenden des gefährlichen Cylinders den vollständigen Ort von dreifach zählenden Standpunkten bilden, läßt sich nicht sagen. Wegen des hohen Grades der Gleichung 8. läßt

sich nämlich nicht erweisen, ob diese Geraden den vollständigen reellen Durchschnitt der Flächen 5. und 8. darstellen.

Da nun gerade den 3 Erzeugenden durch **A**, **B**, **C**, deren Existenz auf dem gefährlichen Cylinder aus der bloßen Form seiner Gleichung 5. kenntlich ist, die Eigenschaft, Orte von 3 zusammenfallenden Standpunkten zu sein, zukommt, so liegt die Vermutung nahe, daß auch die Cylindererzeugenden durch A, B, C und die unendlich fernen Geraden in α, β, γ, die wir der Vollständigkeit halber auch heranziehen wollen, diese Eigenschaft besitzen.

Die Erzeugende in A hat die Gleichungen

$$III \ldots\ldots\ldots \quad l^2 - m^2 + c^2 = 0$$
$$V \ldots\ldots\ldots \quad l^2 - n^2 + b^2 = 0.$$

Führt man sie in die Gleichung 8. ein, so nimmt deren linke Seite die Form an

$$-l^2\,(n^2-l^2+b^2)\,(m^2-l^2+c^2)\,[(n^2-m^2+a^2)\,(m^2-l^2+c^2) + (m^2-n^2+a^2)\,(n^2-l^2+b^2)]$$

oder: $-l^2 \cdot 8b^2c^2[(a^2+b^2-c^2)\,c^2+(a^2-b^2+c^2)\,b^2]$.

Da dieser Ausdruck im allgemeinen nicht verschwindet, so hat die Erzeugende in A und, wie analog gezeigt wird, haben die Erzeugenden in B und C nicht wie die ihnen diametral gegenüberliegenden Erzeugenden in **A**, **B**, **C** die Eigenschaft, Orte von dreifach zählenden Standpunkten zu sein.

Von den unendlich fernen Geraden in α, β, γ greifen wir zweckmäßig die durch die Gleichungen

$$III \ldots\ldots\ldots \quad l^2 - m^2 + c^2 = 0$$
$$VI \ldots\ldots\ldots \quad m^2 - l^2 + c^2 = 0$$

definierte in γ heraus. In jedem Summanden der linken Seite der Gleichung 8. kommt entweder $l^2 - m^2 + c^2$ oder $m^2 - l^2 + c^2$ als Faktor vor, sodaß wir sagen können, daß die 3 Geraden in α, β, γ — von denen in α und β gilt das Gleiche wie von derjenigen in γ — die Bedingung für das Zusammenfallen von 3 Punkten l, m, n erfüllen.

Das wesentliche Resultat der letzten Untersuchungen ist also: Auf dem gefährlichen Cylinder lassen sich 3 Geraden angeben, nämlich die den Fixpunkten diametral gegenüberliegenden Erzeugenden, welche Orte von 3 zusammenfallenden Standpunkten sind. Die Erzeugenden durch die Fixpunkte selbst haben diese Eigenschaft nicht.

Wenn wir die Elimination von l, m, n aus den Gleichungen 1., 2., 3. und 7. auch nicht vollziehen und mithin die Kurve auf der Diskriminantenfläche, deren Punkte eben die Bestimmungsstücke der dreifachen Standpunkte sind, nicht angeben konnten, so ist es doch möglich, diejenigen Teile dieser Kurve zu finden, denen die Geraden in **A**, **B**, **C** und in α, β, γ entsprechen.

Die der Cylindererzeugenden in **A** entsprechende Kurve leitet sich nämlich aus den Gleichungen

$$II \ldots\ldots\ldots\ n^2 - l^2 + b^2 = 0$$
$$VI \ldots\ldots\ldots\ m^2 - l^2 + c^2 = 0$$

in Verbindung mit 1., 2., 3. durch Elimination von l, m, n ab und hat demgemäß die Gleichungen

$$b^2 w^2 - c^2 v^2 - (b^2 - c^2) = 0$$
$$b^2 w^2 + (a^2 + b^2) v^2 - 2b^2 u v w - a^2 = 0.$$

Die den Erzeugenden durch **B** und **C** entsprechenden Kurven auf der Diskriminantenfläche lassen sich hieraus durch cyklische Vertauschung von a, b, c und u, v, w herstellen. Diese 3 Kurven sind als die Schnitte von hyperbolischen Cylindern mit Flächen 3. Ordnung Raumkurven von der 6. Ordnung.

Die der Geraden in α auf der Diskriminantenfläche entsprechende Kurve wird aus den Gleichungen

$$I \ldots\ldots\ldots\ m^2 - n^2 + a^2 = 0$$
$$IV \ldots\ldots\ldots\ n^2 - m^2 + a^2 = 0$$

in Verbindung mit 1., 2. und 3. gewonnen und hat die Gleichungen

$$2(1 - u) - a^2 = 0$$
$$4v^2(1 + c^2) - 4vw(2 - b^2 - c^2) + 4w^2(1 + b^2) + (b^2 - c^2)^2 = 0.$$

Durch cyklische Vertauschung gehen aus ihnen die Gleichungen der Kurven hervor, welche den Geraden in β und γ entsprechen. Diese 3 Kurven sind Kegelschnitte auf der Diskriminantenfläche.

Anmerkung. In Ergänzung der Ausführungen auf S. 14 wollen wir uns noch mit der Bedeutung der Gleichungen

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

befassen, deren Bestehen die Auffindung des Standpunktes durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gestattet. Wir suchen also die Orte der Spitzen 0 derjenigen Dreikante $0ABC$, bei denen zwischen den Kanten a und b bezw. b und c und den gegenüberliegenden Winkeln α und β bezw. β und γ die obigen Proportionen bestehen. Zu diesem Zwecke führen wir an Stelle der variablen

Winkel die tripolaren Koordinaten l, m, n als Variable ein. Hierzu dienen die Bestimmungsgleichungen 1. mit 3.

Wenden wir sie zunächst auf die eine Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ an, so erhalten wir $a^2\left(1 - \frac{(l^2+n^2-b^2)^2}{4\,l^2\,n^2}\right) = b^2\left(1 - \frac{(m^2+n^2-a^2)^2}{4\,m^2\,n^2}\right)$, oder $a^2 m^2 (l^2-n^2+b^2)^2 = b^2 l^2 (m^2-n^2+a^2)^2$. Diese Gleichung läßt unmittelbar ersehen, daß der betreffende Ort durch die Fixpunkte A $(l=0,\ n=b)$ und B $(m=0,\ n=a)$, sowie durch C $(l=b,\ m=a,\ n=0)$ hindurchgeht; ferner liegt auf ihm die Gerade

$$\begin{cases} l^2-n^2+b^2=0 \text{ (Ebene } I) \\ m^2-n^2+a^2=0 \text{ (Ebene } V), \end{cases}$$

die in **C** senkrecht auf der Ebene ABC steht.

Um die Fläche genauer kennen zu lernen, fassen wir sie als das Erzeugnis der beiden Flächenbüschel auf, deren Gleichungen durch Einführung eines variablen Parameters λ aus der Gleichung des Ortes selbst hervorgehen:

$$a^2 m^2 \lambda = (m^2-n^2+a^2)^2$$
$$b^2 l^2 \lambda = (l^2-n^2+b^2)^2.$$

Beide Gleichungen definieren gleichartige Büschel von Rotationsflächen mit den Geraden BC und AC als Axen. Alle Flächen des ersten Büschels haben den Punkt B, die des zweiten Büschels A gemeinsam. Setzen wir im Anschluß an die Bezeichnung von Fig. 7, S. 25 die erste der beiden Gleichungen in rechtwinklige Koordinaten um, so ergibt sich die einfache Gleichung

$$\xi^2 (4-\lambda) = \eta^2 \lambda,$$

welche für die einzelnen Werte von λ zwei zur Geraden BC symmetrisch liegende gerade Linien durch B darstellt. Räumlich gedeutet definiert die Gleichung einen Kreiskegel mit BC als Axe und mit B als Spitze. Das Flächenbüschel für variable Werte von λ wird von der Gesamtheit dieser Kegel gebildet.

Die zweite Gleichung definiert dementsprechend das Büschel von Kreiskegeln mit der Axe AC, die sämtlich ihre Spitze in A haben.

Das Erzeugnis dieser beiden Büschel von Kegeln 2. Ordnung, also unsere gesuchte Fläche, ist demnach von der 4. Ordnung. Ihre Schnittkurve mit der Ebene des Fixpunktdreieckes ABC ist als Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel ein Kegelschnitt, der durch die Mittelpunkte A und B der Büschel sowie durch C

und **C** als durch die Schnittpunkte entsprechender (zu $\lambda = 4$ bezw. $\lambda = 0$ gehöriger) Strahlen geht.

In analoger Weise ergibt sich als Ort für die Spitzen derjenigen Dreikante, für welche die Relation

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

gilt, eine Fläche 4. Ordnung als Erzeugnis zweier Büschel von Kreiskegeln mit B und C als Spitzen und BA und CA als Axen. Die Fläche enthält die Senkrechte zur Ebene ABC in **A** und schneidet diese Ebene nach einem Kegelschnitt, der durch A, B, C und **A** geht.

Aus Symmetriegründen im allgemeinen, im speziellen daraus, daß wir die weitere Bedingung $\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ für die Möglichkeit der Auffindung des Standpunktes durch elementare Konstruktionen erhalten würden, wenn wir nicht n, sondern l oder m gleich 1 setzen würden, folgt, daß eine dritte ebensolche Fläche 4. Ordnung den Gesamtort dieser Raumpunkte vervollständigt.

§ 5.

Praktische Ausführung der Bestimmung des Standpunktes und der äußeren Orientierungselemente.

Für alle folgenden Ausführungen wollen wir die Annahme machen, daß wir die Seiten des Dreiecks der Fixpunkte A, B, C der Größe nach mit a, b, c bezeichnen, so zwar, daß

$$a > b > c \text{ sei.}$$

1. Die Bestimmung des Standpunktes. Die erste Aufgabe bei der Rekonstruktion des Standpunktes besteht darin, die Kegelschnitte $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ (vgl. § 2) in der zur lm-Ebene parallelen Ebene $n = 1$

$$K_1 \equiv a^2(l-v)^2 - b^2(m-u)^2 + a^2(1-v^2) - b^2(1-u^2) = 0$$
$$K_2 \equiv (b^2-c^2)l^2 - 2b^2 v\, l\, m + b^2 m^2 + 2c^2 v\, l - c^2 = 0$$

zu konstruieren und ihre im Quadranten $+l$, $+m$ gelegenen Schnittpunkte zu ermitteln: sie liefern der Zahl nach die brauchbaren Standpunkte und ihren Koordinaten nach die Verhältnisse der Entfernungen der Standpunkte von den Fixpunkten.

Was nun die Konstruktion der Kegelschnitte betrifft, so wollen wir diese punktweise durchführen und uns event. auf die Zeichnung der im genannten Quadranten liegenden Teilkurven beschränken. Im einzelnen verfahren wir folgendermaßen:

Die Hyperbel $K_1 = 0$ konstruieren wir aus dem Mittelpunkte $l = v$, $m = u$, den Asymptoten, die wir als Parallele zu den Geraden $a\,l - b\,m = 0$, $a\,l + b\,m = 0$ durch den Mittelpunkt ziehen, und aus dem einen der beiden stets reellen Schnittpunkte der Hyperbel mit der m-Axe $l = 0$, $m = u \pm \sqrt{u^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}}$.

Der Konstruktion des Kegelschnittes $K_2 = 0$ muß die Bestimmung seiner Gattung auf Grund der S. 13 angestellten Untersuchung vorausgehen. Es sei zunächst $b^2(1 - w^2) - c^2(1 - v^2) = 0$ und $b^2(1 - w^2) - c^2 < 0$, so ist $K_2 = 0$ eine Hyperbel. Diese konstruieren wir aus dem Mittelpunkte $l = \frac{-c^2 v}{b^2(1-w^2) - c^2}$, $m = l\,w$, den Asymptoten, die wir zu den Geraden

$$l\left(b\,w + \sqrt{c^2 - b^2(1-w^2)}\right) - m\,b = 0$$
$$l\left(b\,w - \sqrt{c^2 - b^2(1-w^2)}\right) - m\,b = 0$$

parallel ziehen, und aus einem der zwei festen, allen Kegelschnitten $K_2 = 0$ gemeinsamen Punkte $l = 0$, $m = +\frac{c}{b}$. Ist sodann $b^2(1 - w^2) - c^2 = 0$, die Kurve 2. Ordnung also eine Parabel von der Gleichung

$$b^2(m - l\,w)^2 + 2c^2 v\,l - c^2 = 0,$$

so haben wir in der Geraden $m - l\,w = 0$ die Axenrichtung und in der Geraden $2\,v\,l - 1 = 0$ die Tangente an die Parabel in dem Schnittpunkte dieser beiden geraden Linien gegeben. Mit Hilfe dieser Axenrichtung, dieser Tangente und des gemeinsamen Punktes sowie eines weiteren Punktes, der uns in einem der beiden festen Punkte $l = 0$, $m = \pm\frac{c}{b}$ zur Verfügung steht, führen wir die bekannte Fundamentalkonstruktion der Parabel als des Erzeugnisses zweier projektiver Strahlenbüschel aus, die auf der Tangente und auf der Axenrichtung durch den zweiten Punkt ähnliche Punktreihen ausschneiden.

Wenn endlich $b^2(1 - w^2) - c^2 > 0$, der Kegelschnitt also eine Ellipse ist, so bietet sich nicht die Möglichkeit ähnlich ein-

facher Konstruktion. Zunächst legen wir durch den Mittelpunkt $l = \frac{-c^2 v}{b^2 (1 - w^2) - c^2}$, $m = l w$ die Axen, indem wir die beiden Geraden ziehen, die mit der l-Axe die Winkel α und $90^0 + \alpha$ bilden, wo α durch die Gleichung $tg\, 2\alpha = \frac{2 b^2 w}{c^2}$ bestimmt ist. Die Axen machen wir zur x- und y-Axe eines Koordinatensystems und ermitteln durch Ausmessung die Koordinaten von mindestens zweien der 4 bekannten Ellipsenpunkte, nämlich der 2 Punkte $l = 0$, $m = \pm \frac{c}{b}$ und der 2 ebenfalls stets reellen Schnittpunkte mit der l-Axe $m = 0$, $l = \frac{1}{b^2 - c^2}\left(-c^2 v \pm \sqrt{b^2 c^2 - c^4 (1 - v^2)}\right)$. Mittels der Koordinaten von 2 Punkten und der Axengleichung der Ellipse $a_{11} x^2 + a_{22} y^2 - 1 = 0$ lassen sich die Halbaxen berechnen. Aus den Kreisen um den Mittelpunkt mit den Halbaxen als Radien konstruieren wir vollends die Ellipse.

Wenn nun die Kegelschnitte $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ konstruiert sind, so hat man die Koordinaten l und m ihrer Schnittpunkte durch Messung zu bestimmen. Sind l' und m' die angenäherten Koordinaten eines Schnittpunktes, so finden wir den Ausführungen auf S. 12 entsprechend als Näherungswerte der zugehörigen Kanten des Dreikants:

$$l = \sigma l', \quad m = \sigma m', \quad n = \sigma,$$

wo $$\sigma = + \frac{a}{\sqrt{m'^2 + 1 - 2 m' u}}$$ ist.

Unter Zugrundelegung eines dieser Näherungswerte rechnet man sodann unter Benützung logarithmischer Differenzen mit darauffolgender Korrektur die Dreiecke AOB, BOC, COA des Dreikants $OABC$ etwa von der Kante OA ausgehend durch, bis man erreicht, daß sich der Ausgangswert der Kante OA am Schlusse reproduziert. Die drei so zusammengehörigen Werte l, m, n sind dann die wahren Längen der Kanten. Man erhält soviele Dreikante, als die Kegelschnitte Schnittpunkte mit rein positiven Koordinaten haben.

Sind in dieser Weise die Längen l, m, n bestimmt, so können wir uns der Berechnung der Koordinaten x, y, z des Standpunktes O zuwenden, die auf das gleiche Koordinatensystem wie die Fix-

punkte A, B, C bezogen sind und in welchem die Letzteren die bekannten Koordinaten haben:

$$A \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x_A,\; y_A,\; z_A$$
$$B \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x_B,\; y_B,\; z_B$$
$$C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x_C,\; y_C,\; z_C.$$

Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst den Fußpunkt $F\,(x_F,\, y_F,\, z_F)$ der Höhe OF des Tetraeders $OABC$ (Fig. 9).

Die Höhe $OF = h$ ist durch die Formel gegeben:

$$h = l \cdot m \cdot n \sqrt{\frac{\sin\sigma \cdot \sin(\sigma-\alpha) \cdot \sin(\sigma-\beta) \cdot \sin(\sigma-\gamma)}{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}\;^{*)},$$

wo $\sigma = {}^1/_2\,(\alpha+\beta+\gamma)$ und $s = {}^1/_2\,(a+b+c)$ ist. Die Abstände des Fußpunktes F von den Seiten a, b, c berechnen sich aus h und aus den Höhen

$$OA' = \frac{m \cdot n \cdot \sin\alpha}{a}, \qquad OB' = \frac{n \cdot l \cdot \sin\beta}{b}, \qquad OC' = \frac{l \cdot m \cdot \sin\gamma}{c}$$

der Dreiecke BOC, COA, AOB folgendermaßen:

$$p = \pm\sqrt{\left(\frac{m\,n\sin\alpha}{a}\right)^2 - h^2}$$

$$q = \pm\sqrt{\left(\frac{n\,l\sin\beta}{b}\right)^2 - h^2}$$

$$r = \pm\sqrt{\left(\frac{l\,m\sin\gamma}{c}\right)^2 - h^2}.$$

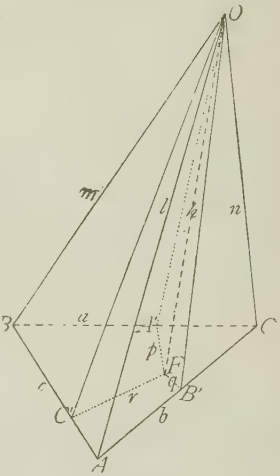


Fig. 9.

Versieht man die Abstände p, q, r eines im Inneren des Dreiecks ABC gelegenen Punktes von den Seiten mit positiven Vorzeichen, so hat man den Abständen eines außerhalb des Dreiecks gelegenen Punktes positive und negative Vorzeichen zu geben, je nachdem sie mit den parallelen Abständen eines innerhalb des Dreiecks liegenden Punktes in der gleichen oder in der entgegen-

*) E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 2. Auflage, Stuttgart 1897, S. 474, gibt bei Berechnung des Volumens eines durch 3 Kanten l, m, n und die eingeschlossenen Seitenwinkel α, β, γ gegebenen Tetraeders die Formel an: $V = {}^1/_3 \cdot l\,m\,n \cdot S_d$, wo der »Ecken-Sinus« $S_d = \sqrt{\sin\sigma \cdot \sin(\sigma-\alpha) \cdot \sin(\sigma-\beta) \cdot \sin(\sigma-\gamma)}$ ist. Beachtet man, daß anderseits $V = {}^1/_3\,h \cdot \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ ist, so folgt der oben angegebene Wert für die Höhe h.

gesetzten Richtung laufen. Um im speziellen Falle zu entscheiden, welche von den Strecken p, q, r positiv bezw. negativ zu nehmen sind, kann man entweder die Lage von F gegenüber den Seiten AB, BC, CA durch Umklappen der Dreiecke AOB, BOC, COA um die Kanten c, a, b in die Ebene ABC und durch Fällen der Höhen OA', OB', OC' ermitteln, oder aber man kann den Inhalt des Dreiecks ABC einmal aus den Seiten a, b, c durch die Heron'sche Formel und dann aus den Dreiecken AFB, BFC, CFA gleich $\frac{1}{2}(ap+bq+cr)$ berechnen, wobei die Vorzeichen von p, q, r so zu wählen sind, daß die beiden Werte für den Dreiecksinhalt übereinstimmen.

Sind nun die Strecken p, q, r eindeutig bestimmt, so können die Koordinaten x_F, y_F, z_F des Fußpunktes F berechnet werden. Wir ziehen CF (Fig. 10); der Schnittpunkt dieser Geraden mit AB sei D (x_D, y_D, z_D). Die Koordinaten von D sind nun zu bestimmen. Man hat, indem man mit (p) und (q) die Abstände des Punktes D von BC und AC bezeichnet, für die Berechnung der Höhenkoordinate z_D die Verhältnisse:

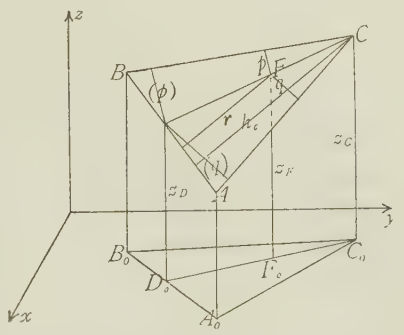


Fig. 10

$$\frac{z_B - z_D}{z_D - z_A} = \frac{BD}{AD} = \frac{(p)\cdot \sin \sphericalangle BAC}{(q)\cdot \sin \sphericalangle ABC} = \frac{p\cdot a}{q\cdot b};$$

hieraus folgt:

$$z_D = \frac{z_A\cdot pa + z_B\cdot qb}{pa+qb}.$$

Für die Berechnung von z_F ergibt sich aus

$$(z_C - z_D) : (z_F - z_D) = CD : DF = h_c : r,$$

wo h_c die von C ausgehende Höhe im ΔABC ist:

$z_F = \dfrac{z_D(h_c - r) + z_C\cdot r}{h_c}$ und schließlich mit Berücksichtigung der Identität

$$c\cdot h_c = pa + qb + rc\,(= 2\cdot \Delta ABC):\quad z_F = \frac{z_A\cdot pa + z_B\cdot qb + z_C\cdot rc}{pa+qb+rc}.$$

In analoger Weise berechnet, lauten die Formeln für die beiden anderen Koordinaten:

$$x_F = \frac{x_A\cdot pa + x_B\cdot qb + x_C\cdot rc}{pa+qb+rc},\qquad y_F = \frac{y_A\cdot pa + y_B\cdot qb + y_C\cdot rc}{pa+qb+rc}.$$

Um endlich die Koordinaten x, y, z des Standpunktes O zu bestimmen, verfahren wir so, daß wir die Gleichung der Ebene ABC aufstellen und die Lage des Punktes O als des Endpunktes der Höhe FO ermitteln. Hierzu nimmt man zweckmäßig eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems nach F als neuem Anfangspunkte vor. Die Koordinaten von A, B, C und F im neuen System sind:

$$\begin{aligned} A &\ldots\ldots x_A - x_F,\ y_A - y_F,\ z_A - z_F \\ B &\ldots\ldots x_B - x_F,\ y_B - y_F,\ z_B - z_F \\ C &\ldots\ldots x_C - x_F,\ y_C - y_F,\ z_C - z_F \\ F &\ldots\ldots 0,\quad 0,\quad 0\ . \end{aligned}$$

Aus der Gleichung der Ebene ABC, zu deren Aufstellung man von den 3 Punkten A, B, C irgend zwei wählt (z. B. A und B):

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_A - x_F & y_A - y_F & z_A - z_F \\ x_B - x_F & y_B - y_F & z_B - z_F \end{vmatrix} = 0$$

erhält man die Richtungskosinus der Senkrechten aus den zweireihigen Unterdeterminanten Δ_X, Δ_Y, Δ_Z von X, Y, Z. Die Koordinaten des Standpunktes sind dann in unserem zum früheren parallelen Koordinatensystem:

$$X = h \cdot \frac{\Delta_X}{+\sqrt{\Delta_X^2 + \Delta_Y^2 + \Delta_Z^2}} = \rho \cdot \Delta_X$$

$$Y = h \cdot \frac{\Delta_Y}{+\sqrt{\Delta_X^2 + \Delta_Y^2 + \Delta_Z^2}} = \rho \cdot \Delta_Y$$

$$Z = h \cdot \frac{\Delta_Z}{\pm\sqrt{\Delta_X^2 + \Delta_Y^2 + \Delta_Z^2}} = \rho \cdot \Delta_Z.$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta_X^2 + \Delta_Y^2 + \Delta_Z^2}$ ist so zu wählen, daß die Höhenkoordinate Z positiv wird.

Im ursprünglichen Koordinatensystem hat der Standpunkt demnach die Koordinaten:

$$\underline{\underline{x = x_F + X,}} \quad \underline{y = y_F + Y,} \quad \underline{\underline{z = z_F + Z.}}$$

Wenn sich der Standpunkt nicht angenähert über, sondern wesentlich seitlich von den Fixpunkten befindet, so ist wegen der Erdkrümmung und der Refraktion noch eine Korrektur der Höhenkoordinate z erforderlich. Diesen Verhältnissen wird hinreichend genau Rechnung getragen, wenn man z um $0{,}068 \cdot E^2$,*) wo E die

*) Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Bd. 3. Aufl. 1888, § 123

in km zu messende seitliche Entfernung ist, gegeben durch $E^2 = x^2 + y^2$, vermehrt.

2. Die Bestimmung der äußeren Orientierungselemente. Nach der jetzt gewonnenen Kenntnis der Lage des Standpunktes kann die äußere Orientierung gegen die Lotlinie, also Horizont, Hauptvertikale und Neigung der photographischen Aufnahme, ermittelt werden. A_1, B_1, C_1 seien die Bildpunkte von A, B, C auf der Bildebene und zwar auf dem Positiv (Fig. 11). Um fürs erste den Horizont aufzusuchen, bestimmen wir zunächst eine Parallele zu ihm durch eine Ecke des $\Delta A_1 B_1 C_1$, etwa durch A_1. Um ihren Schnittpunkt D_1 mit der gegenüberliegenden Seite $B_1 C_1$ zu bekommen, ist $B_1 C_1$ im Verhältnis der Höhenunterschiede von B_1 und C_1 gegenüber A_1 zu teilen: $B_1 D_1 : C_1 D_1 = (z_{B1} - z_{A1}) : (z_{C1} - z_{A1})$, wo z_{A1}, z_{B1}, z_{C1} die Höhenkoordinaten von A_1, B_1, C_1 im x, y, z-Systeme sind. Bezeichnet man die Distanzen vom Zentrum 0 nach den Bildpunkten A_1, B_1, C_1 mit D_a, D_b, D_c, so lassen sich diese Höhen z_{A1}, z_{B1}, z_{C1} durch die Höhen der Fixpunkte und des Standpunktes mittels der Beziehungen ersetzen:

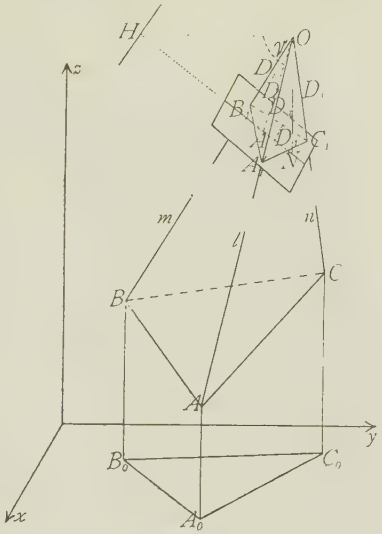


Fig. 11.

$$z - z_{A1} = \frac{D_a}{l} \cdot (z - z_A)$$

$$z - z_{B1} = \frac{D_b}{m} \cdot (z - z_B)$$

$$z - z_{C1} = \frac{D_c}{n} \cdot (z - z_C).$$

Dadurch ergibt sich für die Teilung von $B_1 C_1$ durch D_1 das Verhältnis:

$$\frac{B_1 D_1}{C_1 D_1} = \frac{\frac{D_a}{l} \cdot (z - z_A) - \frac{D_b}{m} \cdot (z - z_B)}{\frac{D_a}{l} \cdot (z - z_A) - \frac{D_c}{n} \cdot (z - z_C)} = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

Der Teilpunkt D_1 liegt innerhalb oder außerhalb der Strecke $B_1 C_1$, je nachdem das Teilverhältnis $-\frac{\lambda}{\mu}$ negativ oder positiv ist.

Bezeichnet man die Koordinaten der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 in dem rechtwinkligen Koordinatensystem auf der Bildebene, dessen Axen man zweckmäßig zu den Rahmenseiten parallel und durch ihre Mitten gehend wählt, mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4, so berechnen sich x_4 und y_4 nach der Formel

$$x_4 = \frac{\lambda x_3 + \mu x_2}{\lambda + \mu}, \qquad y_4 = \frac{\lambda y_3 + \mu y_2}{\lambda + \mu}.$$

Somit ist D_1 und also die Parallele $A_1 D_1$ zum Horizont gefunden. Ein Element der äußeren Orientierung ist nun bekannt: Die Senkrechte zur Horizont-Parallelen $A_1 D_1$ durch den Hauptpunkt A ist die Hauptvertikale.

Den Horizont findet man dadurch, daß man seine auf der Hauptvertikalen zu messende Entfernung HA vom Hauptpunkt A ermittelt. Es ist $HA = D \cdot \operatorname{tang} \nu$, wo D die Bildweite und ν die Neigung der photographischen Aufnahme ist. Es muß also zuvor diese Neigung berechnet werden. Zu diesem Zwecke suchen wir die Neigungswinkel, welche die optische Axe mit den Koordinatenaxen x, y, z bildet; das Komplement zu dem Winkel der optischen Axe gegen die vertikale z-Axe ist die gesuchte Neigung ν der photographischen Aufnahme. Um die Winkel, welche die Richtung der optischen Axe angeben, zu finden, stellen wir die Gleichung der Ebene der Bildpunkte A_1, B_1, C_1 auf. Hierzu brauchen wir die Koordinaten dieser Punkte im xyz-System. Für die z-Koordinaten z_{A1}, z_{B1}, z_{C1} sind die Formeln (s. vorhergeh. S.) bereits aufgestellt. Die analogen Formeln für die Koordinaten x_{A1}, x_{B1}, x_{C1} und y_{A1}, y_{B1}, y_{C1} lauten:

$$x - x_{A1} = \frac{D_a}{l}(x - x_A) \qquad y - y_{A1} = \frac{D_a}{l}(y - y_A)$$

$$x - x_{B1} = \frac{D_b}{m}(x - x_B) \qquad y - y_{B1} = \frac{D_b}{m}(y - y_B)$$

$$x - x_{C1} = \frac{D_c}{n}(x - x_C); \qquad y - y_{C1} = \frac{D_c}{n}(y - y_C).$$

Die Gleichung der Ebene durch A_1, B_1, C_1 lautet:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_{A1} & y_{A1} & z_{A1} & 1 \\ x_{B1} & y_{B1} & z_{B1} & 1 \\ x_{C1} & y_{C1} & z_{C1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} X-x_{A1} & Y-y_{A1} & Z-z_{A1} \\ x_{A1}-x_{B1} & y_{A1}-y_{B1} & z_{A1}-z_{B1} \\ x_{A1}-x_{C1} & y_{A1}-y_{C1} & z_{A1}-z_{C1} \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benützung der angegebenen Formeln:

$$0 = \begin{vmatrix} X-x_{A1} & Y-y_{A1} & Z-z_{A1} \\ \frac{D_a}{l}(x-x_A)-\frac{D_b}{m}(x-x_B) & \frac{D_a}{l}(y-y_A)-\frac{D_b}{m}(y-y_B) & \frac{D_a}{l}(z-z_A)-\frac{D_b}{m}(z-z_B) \\ \frac{D_a}{l}(x-x_A)-\frac{D_c}{n}(x-x_C) & \frac{D_a}{l}(y-y_A)-\frac{D_c}{n}(y-y_C) & \frac{D_a}{l}(z-z_A)-\frac{D_e}{n}(z-z_C) \end{vmatrix}$$

Bezeichnen wir die Unterdeterminanten der Elemente der 1. Zeile mit $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$ und setzen $\pm\sqrt{\Delta' x^2+\Delta' y^2+\Delta' z^2} = 1 : \rho'$, so können wir sagen: Die Cosinus der Neigungswinkel der optischen Axe (als einer Normalen zur Bildebene) gegen die Axen des Koordinatensystems sind $\rho'\Delta' x$, $\rho'\Delta' y$, $\rho'\Delta' z$. Dabei ist das Vorzeichen der Quadratwurzel von ρ' so zu wählen, daß $\rho'\Delta' z = \sin\nu$ positiv wird, da ν ein spitzer Winkel ist.

Die Neigung der photographischen Aufnahme ist durch den Winkel ν von $\sin\nu = \rho'\Delta' z$ gegeben. Nun läßt sich auch die Lage des Horizonts angeben: Der Horizont ist die Senkrechte zur Hauptvertikalen im Abstande $AH = D \cdot tg\,\nu$, wo $\sin\nu = \rho'\Delta' z$ ist, vom Hauptpunkte.

Will man auch noch den Nadir N auf dem Bilde angeben, so hat man vom Hauptpunkte A an auf der entgegengesetzten Seite von AH die Strecke $AN = D \cdot cotg\,\nu$ auf der Hauptvertikalen abzutragen.

Die Neigung φ des Horizonts gegen die x-Axe des Koordinatensystems auf der Bildebene berechnet sich aus den Koordinaten der Punkte A_1 (x_1, y_1) und D_1 (x_4, y_4) der Horizontalgeraden vermittelst der Formel $tg\,\varphi = \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4}$. Mit Hilfe von φ können nun noch die Koordinaten des Schnittpunktes des Horizonts mit der

Hauptvertikalen, x_H und y_H, und die des Nadirs, x_N und y_N, gefunden werden: $\left.\begin{aligned} x_H &= -AH \cdot \sin\varphi \\ y_H &= +AH \cdot \cos\varphi \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_N &= +AN \cdot \sin\varphi \\ y_N &= -AN \cdot \cos\varphi \end{aligned}\right\}$.

§ 6.

Numerisches Beispiel.

Im folgenden sollen die in § 5 aufgestellten Formeln für die Bestimmung des Standpunktes und der äußeren Orientierungselemente zur Durchrechnung eines numerischen Beispiels verwendet werden.*)

Die x- und y-Koordinaten der Fixpunkte sind den Katasterblättern 1 : 5000 und die z-Koordinaten dem mit Höhenkurven versehenen Positionsblatte Burghausen 1 : 25000 entnommen und auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z bezogen, dessen z-Axe vertikal ist und dessen horizontale Axen mit den Randlinien des Katasterblattes zusammenfallen. Die Höhenkoordinaten sind auf den Meeresspiegel bezogen. Fig. 15, S. 48 zeigt das Dreieck der Fixpunkte in Grund- und Aufriß (Maßstab 1 : 75000). Die Koordinaten der Bildpunkte, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch den Hauptpunkt, sind mittels des Stereokomparators aus dem photographischen Negativ gemessen.

Alle Koordinaten, die sich auf das räumliche Koordinatensystem x, y, z, sowie alle Längen, die sich auf das Dreikant $OABC$ beziehen, werden in Metern, die Koordinaten des Systemes auf der Bildebene sowie die Längen, die mit dem photographischen Apparate zusammenhängen, in Millimetern gemessen.

Die bekannten Fixpunkte und Bildpunkte sind:

Fixpunkte				Bildpunkte			
	x	y	z		x	y	
A	−921,7	+1428,0	+425,0	A_1	−43,47	+34,48	Wegkreuzung
B	+262,7	+557,2	+370,0	B_1	+22,91	+28,41	Turm d. Pfarrkirche Burghausen (Bodenpunkt)
C	−1506,0	−53,0	+393,0	C_1	−15,75	−26,14	Turm d. Kreuzkirche (Bodenpunkt)

*) Dem Beispiele liegt eine vom Luftballon aus aufgenommene Photographie der Gegend von Burghausen a. d. Salzach zugrunde. (S. Titelbild.)

Die unter den Fixpunkten angegebenen Koordinaten sind die in § 5 mit x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C, die unter den Bildpunkten angegebenen die mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 bezeichneten.

Die Bildweite des photographischen Apparates ist

$$D = 151{,}57 \text{ mm}.$$

Mit Hilfe der Bildweite D und der Entfernungen der Bildpunkte A_1, B_1, C_1 vom Hauptpunkte A ergeben sich die schiefen Distanzen vom Zentrum O nach den Bildpunkten:

$$D_a = 161{,}41 \text{ mm } (OA_1)$$
$$D_b = 155{,}90 \text{ mm } (OB_1)$$
$$D_c = 160{,}47 \text{ mm } (OC_1).$$

Für die Entfernungen der Bildpunkte voneinander findet man:

$$a_1 = 87{,}69 \text{ mm } (B_1 C_1)$$
$$b_1 = 60{,}66 \text{ mm } (C_1 A_1)$$
$$c_1 = 66{,}66 \text{ mm } (A_1 B_1).$$

Aus den Längen der eben genannten 6 Strecken berechnen sich sodann die Winkel an der Spitze O des Dreikants $OA_1 B_1 C_1$ bezw. $OABC$ zu:

$$\alpha = 32°8{,}5' \quad (\sphericalangle BOC)$$
$$\beta = 21°43{,}4' \quad (\sphericalangle COA)$$
$$\gamma = 24°10{,}5' \quad (\sphericalangle AOB).$$

Außerdem ergeben sich für die Entfernungen der Fixpunkte voneinander die Werte:

$$a = 1871{,}1 \text{ m } (BC)$$
$$b = 1592{,}4 \text{ m } (CA)$$
$$c = 1471{,}9 \text{ m } (AB).$$

Die Größen $u = \cos\alpha$, $v = \cos\beta$, $w = \cos\gamma$ sind im vorliegenden Falle sämtlich positiv. Der Punkt u, v, w liegt also im Oktanten 1 (vergl. S. 16 und Fig. 3). Die zu erwartenden Standpunkte liegen somit in dem Raume außerhalb der 3 Kugeln $K_a = 0$, $K_b = 0$, $K_c = 0$ um BC, CA, AB (S. 19 und Fig. 5).

Wir kennen nun alle Größen, die wir zur Berechnung der Koeffizienten der beiden Kegelschnitte $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ und mithin zu ihrer Konstruktion brauchen (Fig. 12).

Die Hyperbel $K_1 = 0$ hat den Mittelpunkt M_1:

$$l = 0{,}9290, \qquad m = 0{,}8467,$$

und Asymptoten, die zu den beiden Geraden $1871.1\, l + 1592{,}4\, m = 0$

parallel sind. Die Schnittpunkte mit den Koordinatenaxen sind reell vorhanden:

$$\left.\begin{matrix} l_1 = 0{,}1626 \\ m_1 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} l_2 = 1{,}6953 \\ m_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} l_3 = 0 \\ m_3 = 1{,}8944 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} l_4 = 0 \\ m_4 = -0{,}2010 \end{matrix}\right\}.$$

Der Kegelschnitt $K_2 = 0$ ist ebenfalls eine Hyperbel, da $b^2(1-w^2) - c^2(1-v^2) = 1284 \cdot 10^2 = 0$ und $b^2(1-w^2) - c^2 = -1741 \cdot 10^3 < 0$ ist. Ihr Mittelpunkt M_2 ist

$$l = 1{,}1559, \qquad m = 1{,}0545,$$

ihre Asymptoten sind zu den Geraden

$$1{,}7410\, l - m = 0, \qquad 0{,}0836\, l - m = 0$$

parallel. Die 4 Schnittpunkte der Hyperbel mit den Koordinatenaxen sind wieder reell vorhanden:

$$\left.\begin{matrix} l_1 = 0{,}5140 \\ m_1 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} l_2 = -11{,}4160 \\ m_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} l_{3,4} = 0 \\ m_{3,4} = \pm 0{,}9243 \end{matrix}\right\}.$$

Die Schnittpunkte der Kegelschnitte mit den Koordinatenaxen sind mit Ausnahme des Punktes l_2, m_2 von $K_2 = 0$ infolge ihrer günstigen Lage zur Konstruktion verwendbar. Indem man noch in geeigneter Weise Sekanten durch einzelne dieser Punkte legt, verschafft man sich eine für die hinlänglich genaue Konstruktion der Hyperbeln genügende Anzahl von Punkten. (Fig. 12 ist eine ziemlich genau im Maßstabe 1 : 2 verkleinerte Reproduktion der Originalzeichnung, bei der als Einheit 5 cm gewählt waren. Die im nachfolgenden zur Berechnung verwendeten Zahlen beziehen sich auf diese Originalzeichnung.)

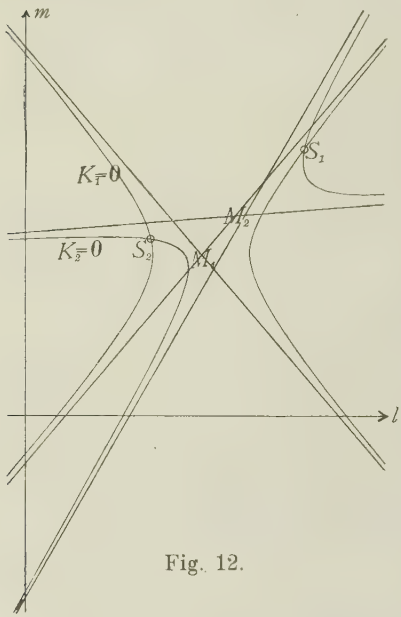


Fig. 12.

Die so erhaltenen Kegelschnitte haben zwei reelle getrennte Schnittpunkte, welche beide in dem Quadranten $+l$, $+m$ liegen. Die Fixpunkte A, B, C liefern also im vorliegenden Falle, von 2 verschiedenen Punkten 0 des Raumes aus aufgenommen, das nämliche Dreikant $0ABC$ der Sehstrahlen.

Wir wollen die Größen, die sich auf das eine und das andere der beiden Dreikante beziehen, dadurch voneinander unterscheiden, daß wir sie einmal bezw. zweimal stricheln.

Wenn wir die Koordinaten der Hyperbelschnittpunkte nur ganz roh, nämlich nur auf mm genau abmessen, also eine durchaus nicht exakte Zeichnung voraussetzen, bekommen wir doch Näherungswerte, die zur genauen Berechnung der Kantenlängen vollauf genügen. Die Abmessung aus der Zeichnung ergibt als Koordinaten von

$$S_1 : 73{,}70 \text{ und } S_2 : 33{,}46.$$

Mit Berücksichtigung des gewählten Maßstabes sind demnach Näherungswerte für die Verhältnisse der Kanten der Dreikante $O'ABC$ und $O''ABC$:

$$l' : m' : n' = 73 : 70 : 50$$
$$l'' : m'' : n'' = 33 : 46 : 50.$$

Als Proportionalitätsfaktoren ergeben sich

$$\sigma' = 48{,}757 \text{ und } \sigma'' = 69{,}682,$$

sodaß wir als Näherungswerte für die Kanten selbst erhalten:

$$l' = 3559; \quad m' = 3413; \quad n' = 2438;$$
$$l'' = 2300; \quad m'' = 3205; \quad n'' = 3484.$$

Wir denken uns nun mit l', m', n' und l'', m'', n'' und den Winkeln α, β, γ die Dreikante konstruiert. Hierauf rechnen wir unter Zugrundelegung der Werte für l' und l'' der Reihe nach die Seitendreiecke OAB, OBC, OCA durch, nehmen aber gleichzeitig noch die Werte als Näherungen für l' und l'' hinzu, deren Logarithmen von denen der obigen Werte um 0,00100 differieren. Wendet man auf die Ausgangsgrößen von l' und l'' und von den um die logarithmische Differenz verschiedenen Werten sowie auf die zugehörigen Resultate der Durchrechnung etwa die regula falsi an, so erhält man bereits genauere Näherungswerte. Eine zweite und schließlich dritte Durchrechnung auf der Grundlage der zuvor gefundenen Werte für die Kante OA, begleitet von einer Korrektur nach der angegebenen Formel, und unter Verwendung der logarithmischen Differenzen 0,00010 bezw. 0,00005 liefert als Kantenlängen

$$l' = 3575{,}4 \text{ m } (\log l' = 3{,}55332)$$
$$m' = 3412{,}1 \text{ m } (\log m' = 3{,}53302)$$
$$n' = 2435{,}7 \text{ m } (\log n' = 3{,}38662)$$

für das eine Dreikant $O'ABC$, und

$$l'' = 2292{,}4 \text{ m } (\log l'' = 3{,}36029)$$
$$m'' = 3225{,}0 \text{ m } (\log m'' = 3{,}50853)$$
$$n'' = 3477{,}2 \text{ m } (\log n'' = 3{,}54122)$$

für das andere Dreikant $O''ABC$.

Die Berechnung der Höhen $O'F'$ und $O''F''$ ergibt:
$h' = 1988{,}0\,\text{m}$ und $h'' = 1719{,}8\,\text{m}$.

Die Figuren 13 und 14 veranschaulichen die zur Ermittlung der Lage der Höhenfußpunkte F′ und F″ dienenden Umklappungen der Seitendreiecke um die Seiten a, b, c in die Ebene ABC. Da in unserem Falle die Lage jedes Fußpunktes gegenüber den Seiten des ΔABC unzweifelhaft feststeht, so genügen die vorgenommenen Umklappungen zur Bestimmung der Vorzeichen von p, q, r vollkommen und es kann auf die Anwendung der Methode der doppelten Berechnung des Inhaltes des ΔABC verzichtet werden. q', r', p'' liegen auf derselben Seite, p', q'', r'' auf der entgegengesetzten Seite von a, b, c wie die Abstände eines im Inneren des ΔABC liegenden Punktes von den Seiten dieses Dreiecks; die ersteren 3 Fußpunktsabstände sind demnach positiv, die letzteren negativ zu nehmen.

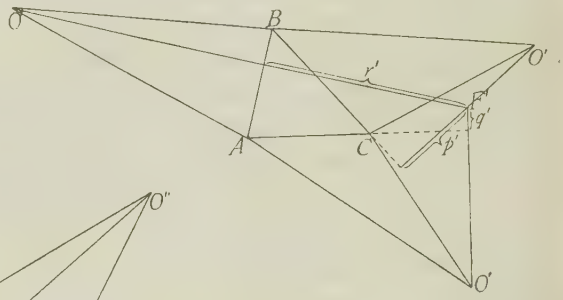


Fig. 13.

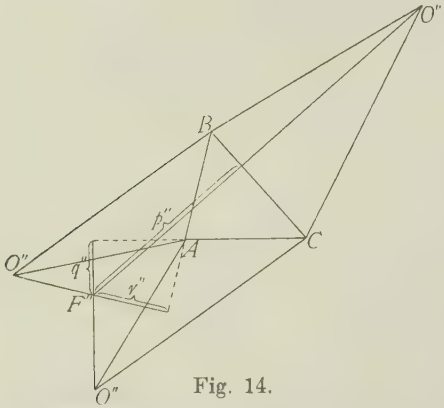


Fig. 14.

Die Zahlenwerte für diese Abstände sind:

$p' = -1277{,}5$	Dreikant $O'ABC$,	$p'' = +2684{,}9$	Dreikant $O''ABC$,
$q' = +380{,}9$		$q'' = -689{,}0$	
$r' = +2751{,}1$		$r'' = -1128{,}3$	

Der Inhalt des ΔABC berechnet sich demnach entweder
aus: $2\Delta = -a \cdot \text{abs.}\, p' + b \cdot \text{abs.}\, q' + c \cdot \text{abs.}\, r'$, oder
aus: $2\Delta = +a \cdot \text{abs.}\, p'' - b \cdot \text{abs.}\, q'' - c \cdot \text{abs.}\, r''$ zu:
$2\Delta = 22657 \cdot 10^2$.

Als Koordinaten der Höhenfußpunkte F′ und F″ findet man sodann:

$x_{F'} = -1648{,}9$; $y_{F'} = -1451{,}9$; $z_{F'} = +353{,}1$;
$x_{F''} = -1066{,}9$; $y_{F''} = +2935{,}3$; $z_{F''} = +475{,}1$.

Wir denken uns jetzt Parallelkoordinatensysteme XYZ zum xyz-Systeme durch die beiden Höhenfußpunkte F' und F'' gelegt. Wenn wir nun die Gleichung der Ebene ABC in dem Koordinatensystem mit F' als Anfangspunkt aufstellen, so brauchen wir sie nicht auch noch im anderen Systeme aufzustellen; denn die Richtungskoeffizienten der beiden zueinander parallelen Höhen $O'F'$ und $O''F''$ ergeben sich aus jeder der beiden Gleichungen als die nämlichen.

In dem Koordinatensysteme durch F' sind die Koordinaten von A und B:

$$X_A = +\ 142{,}9; \quad Y_A = +1398{,}9; \quad Z_A = +39{,}9;$$
$$X_B = +1911{,}6; \quad Y_B = +2009{,}1; \quad Z_B = +16{,}9.$$

Mithin ist die Gleichung der Ebene durch die Fixpunkte:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 142{,}9 & 1398{,}9 & 39{,}9 \\ 1911{,}6 & 2009{,}1 & 16{,}9 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\Delta_X = -56521, \quad \Delta_Y = +73860, \quad \Delta_Z = -23871 \cdot 10^2,$$
$$\sqrt{\Delta_X^2 + \Delta_Y^2 + \Delta_Z^2} = \pm 23888 \cdot 10^2.$$

Da Δ_Z negativ ist und Z positiv werden muß, so ist das negative Zeichen der Quadratwurzel zu nehmen. Demnach sind die Koordinaten der Standpunkte in den Koordinatensystemen durch F' und F'':

O': $\quad X = +47{,}0; \quad Y = -61{,}5; \quad Z = +1986{,}6;$

O'': $\quad X = +40{,}7; \quad Y = -53{,}2; \quad Z = +1718{,}6.$

Im ursprünglichen xyz-System sind also die Koordinaten der Standpunkte (Fig. 15) in m:

O': $\quad x = -1601{,}9; \quad y = -1513{,}4; \quad z = +2339{,}7;$

O'': $\quad x = -1026{,}2; \quad y = +2882{,}1; \quad z = +2193{,}7.$

Mit Berücksichtigung der Erdkrümmung und der mittleren Refraktion vergrößern sich die Höhen von O' noch um 0,3 m und von O'' um 0,6 m.

Tragen wir die x- und y-Koordinaten in die Originalkarte ein, so bekommen wir die Horizontalprojektionen der Raumpunkte O' und O'' (vergl. den Grundriß der Fig. 15). Wir können auch die Bildpunkte dieser Punkte des Geländes auf der Photographie ermitteln. Dies gelingt uns dadurch sehr einfach, daß wir bedenken, daß die Sehstrahlen nach diesen Punkten Vertikalstrahlen sind und die Bildpunkte mithin mit dem Nadir bei jeder Aufnahme zusammen-

fallen. Die Lage des Nadirs werden wir aber später noch suchen (S. 51).

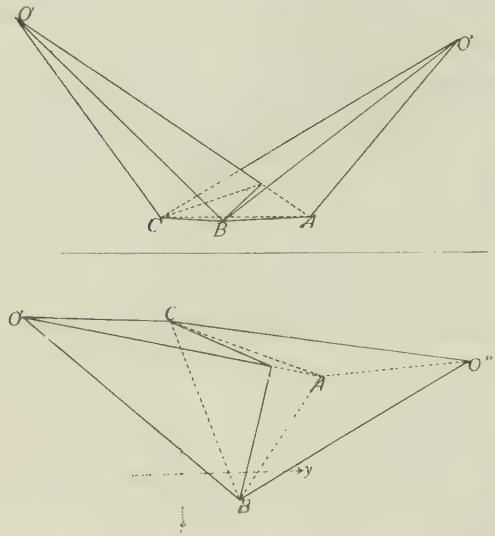


Fig. 15.

Die beiden Punkte O' und O'' dürfen nicht etwa auch als Standpunkte für die vorliegende photographische Aufnahme des ganzen Geländes betrachtet werden: sie sind lediglich 2 für die photographische Aufnahme der 3 Punkte A, B, C gleichwertige Standpunkte, nicht aber für die Aufnahme von mehr Punkten. Wie ein Blick auf die Wände der Gebäude und die Stellung der Türme in der beigegebenen Photographie (Titelbild) zeigt, ist der Standpunkt O', dessen Bild in den eingezeichneten Nadir N fallen würde, derjenige Punkt, von dem aus die Photographie aufgenommen wurde.

In unserem gegebenen Falle, wo die horizontale Entfernung der beiden Punkte O' und O'' sehr groß ist (4433 m), konnte schon nach der Bestimmung der Kanten l, m, n und aus den hieraus resultierenden Neigungen der Dreikante nach entgegengesetzten Seiten, wie sie sich aus der Fig. 15 erkennen lassen, der richtige Standpunkt der Aufnahme des Geländes angegeben werden. Insofern uns aber nicht das Bild des Geländes, sondern dasjenige der 3 Fixpunkte A, B, C interessiert, sind beide Standpunkte brauchbar.

Aber nicht alle Fälle sind derart günstig gelagert. Je geringer der Abstand der gefundenen — zwei, drei oder vier — Standpunkte ist, desto unsicherer wird die Entscheidung über den Originalstandpunkt, die sich auf gewisse Merkmale der Photographie gründet. Die Kenntnis dieses Standpunktes wird dann dadurch erlangt, daß man noch einen 4. Fixpunkt D und seinen Bildpunkt D_1 hinzunimmt und auch noch die Spitze etwa des Dreikantes BCD in der gleichen Weise ermittelt.

Man erhält die nötige Klarheit bereits bei der Konstruktion der Kegelschnitte $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ in der lm-Ebene für $n = 1$. Beide Paare von Kegelschnitten, die für die Winkel des Dreikants $OABC$ und für diejenigen von $OBCD$, haben einen gleichen Schnittpunkt; seine Koordinaten führen auf den Standpunkt, von dem aus die Aufnahme gemacht ist.

Wir wollen nun die Bestimmung der Elemente der äußeren Orientierung vornehmen. Da diese die Stellung des Apparates im Raume angeben, so hat es praktisch zwar nur eine Bedeutung, sie für die vom Punkte O' aus stattgefundene Aufnahme zu berechnen. Es ist jedoch theoretisch nicht ohne Interesse, die äußere Orientierung zu kennen, die dem Apparat bei der Aufnahme der Fixpunkte A, B, C von O'' aus, die das nämliche Bild liefert, zukommt. Wir wollen deshalb die beiden Bestimmungen durchführen. (Die Zahlen, die auf die äußere Orientierung der photographischen Aufnahme

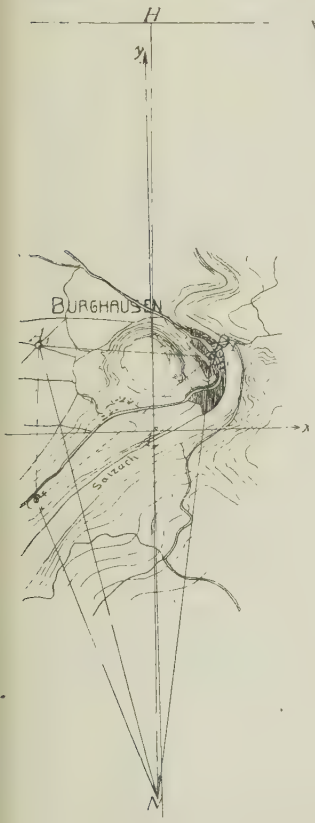


Fig. 16a.

Fig. 16b.

vom Standpunkte O'' aus Bezug haben, sind den entsprechenden für O' in Klammern beigesetzt. Die Fig. 16ª. und 16ᵇ. zeigen in dreifacher Verkleinerung die Vertikalprojektionen der Sehstrahlen von den perspektivischen Zentren O' und O'' nach den Bildern der Fixpunkte auf der photographischen Aufnahme).

Vor allem ist die Kenntnis der folgenden Größen notwendig:

$$\frac{D_a}{l}(x-x_A) = -30{,}71\ (-7{,}36);\quad \frac{D_b}{m}(x-x_B) = -85{,}20\ (-62{,}31);\quad \frac{D_c}{n}(x-x_C) = -6{,}32\ (+22{,}14)$$

$$\frac{D_a}{l}(y-y_A) = -132{,}79\ (+102{,}38);\quad \frac{D_b}{m}(y-y_B) = -94{,}61\ (+112{,}39);\quad \frac{D_c}{n}(y-y_C) = -96{,}21\ (+135{,}45)$$

$$\frac{D_a}{l}(z-z_A) = +86{,}44\ (+124{,}53);\quad \frac{D_b}{m}(z-z_B) = +89{,}99\ (+88{,}16);\quad \frac{D_c}{n}(z-z_C) = +128{,}25\ (+83{,}10).$$

Hieraus findet man das Verhältnis für die Teilung der Strecke $B_1\,C_1$ durch D_1:

$$\frac{B_1\,D_1}{C_1\,D_1} = -\frac{\lambda}{\mu} = \frac{3{,}56}{41{,}81}\left(\frac{36{,}37}{41{,}43}\right)$$

und weiter die Koordinaten des Teilpunktes D_1:

$$x_4 = 29{,}30\ (516{,}42);\ y_4 = 33{,}47\ (420{,}49).$$

Der Teilpunkt D_1 für die von O'' gemachte Aufnahme liegt bedeutend außerhalb der Photographie. Es erweist sich hier als vorteilhaft, die Horizontparallele durch die Ecke C_1 des Dreiecks $A_1\,B_1\,C_1$ zu legen. Für ihren Schnittpunkt D_1 mit $A_1\,B_1$ liefert die Rechnung:

$$\frac{A_1\,D_1}{B_1\,D_1} = \frac{41{,}43}{5{,}06,}$$

und für die Koordinaten von D_1:

$$x_4 = +32{,}14;\ y_4 = +27{,}56.$$

Zur Eintragung des Punktes D_1 in die Photographie benützt man zweckmäßig die Gerade $B_1\,C_1$ $(A_1\,B_1)$ und seine Entfernung von C_1 (A_1):

$$C_1\,D_1 = 95{,}84\text{ mm}\ (A_1\,D_1 = 75{,}94\text{ mm}).$$

Nachdem jetzt die Parallele $A_1\,D_1$ $(C_1\,D_1)$ zum Horizont bekannt ist, kann die Hauptvertikale eingezeichnet werden, da der Hauptpunkt A gegeben ist.

Die zur Berechnung der Neigungswinkel der optischen Axe gegen die Koordinatenaxen und der Neigung der optischen Axe gegen

den Horizont dienende Gleichung der Ebene durch die Bildpunkte A_1, B_1, C_1 lautet für O':

$$\begin{vmatrix} X-x_{A1} & Y-y_{A1} & Z-z_{A1} \\ 54{,}49 & -38{,}18 & -3{,}56 \\ -24{,}39 & -36{,}58 & -41{,}81 \end{vmatrix} = 0 \text{ bezw. f. } O'': \begin{vmatrix} X-x_{A1} & Y-y_{A1} & Z-z_{A1} \\ 29{,}51 & 33{,}07 & -41{,}43 \\ 84{,}45 & 23{,}06 & -5{,}06 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\Delta'_X = +1466{,}08; \quad \Delta'_Y = +2365{,}02; \quad \Delta'_Z = -2924{,}38$$
$$(+788{,}05) \qquad (-3349{,}38) \qquad (-2112{,}40)$$

$$\sqrt{\Delta'_X{}^2 + \Delta'_Y{}^2 + \Delta'_Z{}^2} = \pm 2782{,}53 \ (\pm 4037{,}50).$$

Da Δ'_Z negativ ist, haben wir von der Quadratwurzel ebenfalls das negative Zeichen zu nehmen, damit sin ν, der Quotient der beiden Größen, positiv und ν spitz wird.

Darnach ergeben sich als Neigungswinkel der optischen Axe gegen die Axen des Koordinatensystems die Winkel

$111^0\,17{,}8'$ $(101^0\,15{,}3')$ gegen die positive x = Axe,
$125^0\,52{,}0'$ $(\ 33^0\,57{,}2')$ „ „ „ y = Axe,
$\ 43^0\,34{,}6'$ $(\ 58^0\,27{,}2')$ „ „ „ z = Axe.

Die Neigung der photographischen Aufnahme beträgt

$$\nu = 46^0\,25{,}4' \ (31^0\,32{,}8').$$

Als Entfernung des Horizonts vom Hauptpunkt ergibt sich:

$$AH = 159{,}29 \text{ mm } (93{,}05 \text{ mm})$$

und als Entfernung des Nadirs vom Hauptpunkt, gemessen auf der Hauptvertikalen:

$$AN = 144{,}22 \text{ mm } (246{,}89 \text{ mm}).$$

Die Neigung des Horizonts gegen die x = Axe ist

$$\varphi = -0^0\,47{,}7' \ (34^0\,35{,}0').$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes des Horizonts und der Hauptvertikalen in der Bildebene sind

$$x_H = +2{,}21 \ (52{,}82); \quad y_H = +159{,}28 \ (-76{,}61);$$

die Koordinaten des Nadirs endlich sind

$$x_N = -2{,}00 \ (-140{,}14); \quad y_N = -144{,}20 \ (+203{,}27).$$

Sie sind zugleich die Koordinaten des Bildes derjenigen Stelle im Terrain, über welcher der Luftballon im Momente der photographischen Aufnahme schwebte.

II. Bestimmung des Standpunktes aus 2 bekannten Objektpunkten, ihren photographischen Bildern und dem Fluchtpunkt der vertikalen Richtung.

§ 7.

Die Gleichungen für die Bestimmung des Standpunktes.

Die im I. Abschnitte durchgeführte Methode der Bestimmung des Standpunktes wird in dem Falle unbrauchbar, wo einer der 3 Fixpunkte A, B, C im Unendlichen liegt, wo also 2 Seiten des ΔABC unendlich groß sind. Die Ballonphotogrammetrie liefert einen solchen Fall.*) Der unendlich ferne Punkt ist durch die Richtung von vertikal vom Ballon herabhängenden Lotleinen gegeben. Eine Ecke des Fixpunktdreiecks ist also in vertikaler Richtung ins Unendliche gerückt. Es sei dies der Punkt C (Fig. 17). Sein Bildpunkt C_1 ist als der Fluchtpunkt der Vertikalen der Schnittpunkt der durch das perspektivische Zentrum O gehenden vertikalen Geraden mit der Bildebene, also Zenith oder Nadir.

Die Kenntnis der Lagen von A_1, B_1, C_1 und des Hauptpunktes A sowie der Bildweite D ermöglicht für das Dreikant $OA_1B_1C_1$ die Berechnung der Winkel A_1OC_1 und B_1OC_1, der Komplemente zu den Höhenwinkeln β_1 und β_2 der Sichten OA und OB, und des Horizontalwinkels α, des Neigungswinkels der Ebenen A_1OC_1 und B_1OC_1. Zur Bestimmung des Standpunktes wollen wir die Winkel α_1, β_1, β_2 benützen.

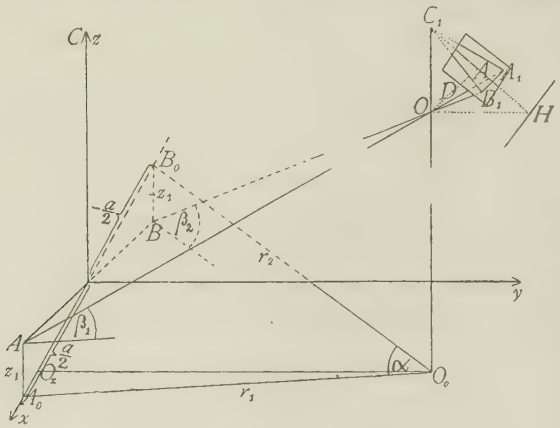


Fig. 17.

Zur Festlegung des Standpunktes nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem xyz an, in dem wir die Vertikalebene durch die Fixpunkte A und B zur xz-Ebene, den Mittel-

*) S. Finsterwalder, Photogrammetrie, S. 29, Fußnote.

punkt der Strecke AB zum Anfangspunkt und die z-Axe vertikal wählen. Die Punkte A, B, O haben dann, wenn $A_0 B_0 = a$ die horizontale Projektion von AB und z_1 die Höhe bezw. Tiefe von A und B sind, die Koordinaten:

$$A: +\frac{a}{2},\ 0, +z_1\ ;\ B: -\frac{a}{2}, 0, -z_1\ ;\ O: x,\ y,\ z.$$

$A_0 O_0 = r_1$ und $B_0 O_0 = r_2$ seien die Projektionen von AO und BO in die xy-Ebene; dann ist $\sphericalangle A_0 O_0 B_0 = \alpha$. Es ergeben sich nun die folgenden Gleichungen:

$$a^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\alpha$$
$$r_1 \operatorname{tg}\beta_1 = z - z_1$$
$$r_2 \operatorname{tg}\beta_2 = z + z_1$$

und hieraus durch Elimination der Hilfsgrößen r_1 und r_2:

1ª. $a^2 \operatorname{tg}^2\beta_1 \operatorname{tg}^2\beta_2 = (z - z_1)^2 \operatorname{tg}^2\beta_2 + (z + z_1)^2 \operatorname{tg}^2\beta_1 - 2(z^2 - z_1^2)\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_2 \cos\alpha.$

Neben dieser Gleichung für z erhält man für x und y:

$$\frac{a}{2} - x = r_1 \cos(r_1\, x) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \Delta A_0 O_0 O_x,$$

oder mit Berücksichtigung der Beziehung

$$r_2^2 = a^2 + r_1^2 - 2 a r_1 \cos(r_1\, x) \ . \ . \quad \Delta O_0 A_0 B_0:$$
$$2 a x = r_2^2 - r_1^2 \text{ und:}$$
$$a y = r_1 r_2 \sin\alpha \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \Delta O_0 A_0 B_0.$$

Wenn man hierin r_1 uud r_2 durch z ausdrückt, kommt:

2ª. $2 a x \operatorname{tg}^2\beta_1 \operatorname{tg}^2\beta_2 = (z + z_1)^2 \operatorname{tg}^2\beta_1 - (z - z_1)^2 \operatorname{tg}^2\beta_2$

3ª. $a y \operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_1 = (z^2 - z_1^2)\sin\alpha.$

Die Gleichung 1ª. besagt, daß es für jedes Tripel von Bestimmungsstücken α, β_1, β_2 Standpunkte in zwei verschiedenen Höhen z gibt. Und da gemäß 2ª. und 3ª. x und y eindeutige Funktionen von α, β_1, β_2 und z sind, so gibt es in jeder dieser Höhen einen und nur einen Standpunkt. Demnach hat die Aufgabe 2 Lösungen.

Wir wollen $\operatorname{tg}\beta_1 = u$, $\operatorname{tg}\beta_2 = v$, $\cos\alpha = w$ setzen und dementsprechend die folgenden Gleichungen als Bestimmungsgleichungen des Problems betrachten:

1. $(z + z_1)^2 u^2 + (z - z_1)^2 v^2 - 2(z^2 - z_1^2) u v w - a^2 u^2 v^2 = 0$
2. $2 a x u^2 v^2 - (z + z_1)^2 u^2 + (z - z_1)^2 v^2 = 0$
3. $a^2 y^2 u^2 v^2 - (z^2 - z_1^2)^2 (1 - w^2) = 0.$

Eine zweite, für die folgenden Ausführungen nicht minder wichtige Form des Gleichungssystems entsteht durch Auflösung der Gleichungen nach u, v, w:

4. $$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2-\frac{(z-z_1)^2}{u^2}=0$$

5. $$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2-\frac{(z+z_1)^2}{v^2}=0$$

6. $$\left(x^2+y^2-\frac{a^2}{4}\right)^2-w^2\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right]\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right]=0.$$

Außer diesen Gleichungen, die u, v, w einzeln enthalten, ist noch die folgende aus 1., 2., 3. hervorgehende Gleichung zu beachten:

7. $$\left(x^2+y^2-\frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{uv}{w}\right)-(z^2-z_1^2)=0.$$

Nur in Verbindung mit dieser Gleichung geben die vorhergehenden die vollständige Beziehung zwischen x, y, z und u, v, w. Die Gleichungen 4., 5., 6. definieren nämlich nur die Quadrate u^2, v^2, w^2 als eindeutige Funktionen der Koordinaten x, y, z des Standpunktes; die linearen Größen u, v, w selbst ergeben sich hieraus den absoluten Werten nach zwar eindeutig, während die Vorzeichen noch beliebig gewählt werden können, sodaß man die 8 möglichen Kombinationen von $\pm u$, $\pm v$, $\pm w$ erhält. Nun tritt aber in einer der ursprünglichen Gleichungen, in 1., außer reinen Quadraten auch ein Glied mit dem Produkte $u\cdot v\cdot w$ auf. Dies besagt, daß die Vorzeichen von u, v, w nicht willkürlich gewählt werden dürfen — was den Gleichungen 4., 5., 6. zufolge geschehen könnte —, damit die Gleichungen des Problems miteinander verträglich sind. Für die Vorzeichenwahl besteht nur insoweit Freiheit, als hierdurch das Vorzeichen des Produktes $u\cdot v\cdot w$ nicht beeinflußt wird. Diese Bedingung, die der Auswahl der Vorzeichen von u, v, w auferlegt ist, kommt in der Gleichung 7. in der gleichen Weise zum Ausdruck wie in der Gleichung 1. Damit sind wir zu dem Ergebnis gekommen:

Dieselben beiden Standpunkte, die sich aus einem gegebenen Tripel von Werten u, v, w berechnen lassen, ergeben sich noch für 3 weitere, in den Kombinationen von $\pm u$, $\pm v$, $\pm w$ derart enthaltene Tripel, daß für sie entweder

I. $\frac{uv}{w}>0$ oder II. $\frac{uv}{w}<0$ ist.

Im einzelnen entsprechen diesen beiden Fällen I. und II. die folgenden Wertetripel u, v, w und demgemäß die beigefügten Dreikantswinkel, wobei wir α, β_1, β_2 selbst als spitz annehmen:

I. $+u, +v, +w : \beta_1, \beta_2, \alpha$
$+u, -v, -w : \beta_1, 180^0-\beta_2, 180^0-\alpha$
$-u, +v, -w : 180^0-\beta_1, \beta_2, 180^0-\alpha$
$-u, -v, +w : 180^0-\beta_1, 180^0-\beta_2, \alpha.$

II. $-u, -v, -w : 180^0-\beta_1, 180^0-\beta_2, 180^0-\alpha$
$-u, +v, +w : 180^0-\beta_1, \beta_2, \alpha$
$+u, -v, +w : \beta_1, 180^0-\beta_2, \alpha$
$+u, +v, -w : \beta_1, \beta_2, 180^0-\alpha.$

Die 4 zu I. und II. gehörigen Winkeltripel bestimmen je die 4 der Gestalt nach verschiedenen Dreikante, welche 3 sich schneidende Geraden bilden, so zwar, daß u, v, w als Variable genommen, entweder die Klasse I oder die Klasse II der überhaupt möglichen Dreikante definieren (vergl. S. 15 u. 16). Die Winkel jedes Einzeldreikantes eines solchen vollständigen Dreikantes führen auf die nämlichen beiden Standpunkte.

§ 8.

Die Brauchbarkeit der Standpunkte.

Wie sich in § 7 zeigte, berechnen sich die nämlichen beiden Standpunkte x, y, z für jedes der 4 unter I bezw. II genannten Winkeltripel: m. a. W.: Wenn bei 4 photographischen Aufnahmen gerade diejenigen einfachen Dreikante $OA_1 B_1 C_1$ vom perspektivischen Zentrum nach den Bildpunkten entstehen, welche durch die Winkel I bezw. II bestimmt sind, so kommen als Standpunkte bei sämtlichen Aufnahmen nur 2 Punkte in Frage. Dies erklärt sich folgendermaßen:

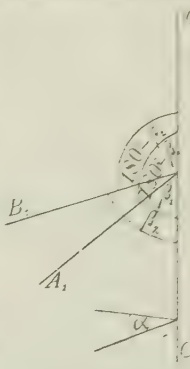


Fig. 18.

Zunächst ist, wenn nicht immer praktisch, so doch theoretisch, die Möglichkeit vorhanden, vom nämlichen Standpunkte aus diejenigen zwei einfachen Dreikante zu erhalten, welche supplementäre Winkel β_1 und $180^0-\beta_1$ und β_2 und $180^0-\beta_2$ und den gleichen Winkel α haben (Fig. 18): C_1 ist einmal der Zenith, das andere Mal der Nadir. Diese beiden Aufnahmen kommen zustande,

wenn man die Platte aus der vertikalen Lage im einen oder anderen Sinne neigt. Darnach ordnen sich die Winkeltripel der Dreikante und ihre trigonometrischen Funktionen in folgender Weise nach Paaren an, welche die Aufnahmen vom nämlichen Punkte aus charakterisieren:

$$\text{I.}\begin{cases} \beta_1, & \beta_2, & \alpha: +u, +v, +w \\ 180^0-\beta_1, & 180^0-\beta_2, & \alpha: -u, -v, +w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1, & 180^0-\beta_2, & 180^0-\alpha: +u, -v, -w \\ 180^0-\beta_1, & \beta_2, & 180^0-\alpha: -u, +v, -w \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} \beta_1, & \beta_2, & 180^0-\alpha: +u, +v, -w \\ 180^0-\beta_1, & 180^0-\beta_2, & 180^0-\alpha: -u, -v, -w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1, & 180^0-\beta_2, & \alpha: +u, -v, +w \\ 180^0-\beta_1, & \beta_2, & \alpha: -u, +v, +w \end{cases}.$$

Das eine Paar von Dreikanten ergibt sich aber nicht etwa vom einen, das andere Paar vom anderen Standpunkte aus. Es kann dies der Fall sein; es ist aber auch möglich, daß an beiden Standpunkten dasselbe Dreikantspaar entsteht und daß das andere Paar von Dreikanten sich bei keiner Aufnahme von einem der beiden Standpunkte aus ergibt. Wenn der erstere Fall eintritt, so ist nur ein Punkt ein „brauchbarer" Standpunkt; im letzteren Falle sind beide Standpunkte brauchbar.

Die folgenden Ausführungen sollen der Entscheidung über das Eintreten des einen oder anderen Falles und mithin über die Brauchbarkeit der Standpunkte dienen.

Die Bestimmung der Standpunkte beruht entweder auf den Gleichungen 1. mit 3. oder auf den daraus abgeleiteten Gleichungen 4. mit 7. Die Gleichung 1. stellt zwei durch die Höhen z, die Wurzeln der Gleichung, bestimmte Horizontalebenen dar. Die Gleichung 2. definiert einen parabolischen Cylinder, dessen Leitparabel in der xz = Ebene eine zur x = Axe parallele Axe hat; der Cylinder selbst steht auf der xz = Ebene senkrecht. In der Gleichung 3. drückt sich die Symmetrie aus, die beim vorliegenden Problem inbezug auf die Ebene $y = 0$ herrscht. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$\left[ayuv + (z^2 - z_1{}^2)\cdot \text{abs.}\sqrt{1-w^2}\right]\cdot\left[ayuv - (z^2-z_1{}^2)\cdot \text{abs.}\sqrt{1-w^2}\right] = 0,$$

so erkennt man, daß sie zwei zur xz — Ebene symmetrisch liegende parabolische Cylinder darstellt, deren Leitparabeln in der yz = Ebene die zur y = Axe parallele Axe gemeinsam haben, und daß die Cylinder selbst auf der yz = Ebene senkrecht stehen.

Wir wollen unsere sämtlichen Untersuchungen dadurch vereinfachen, daß wir uns mit Rücksicht auf die Symmetrie inbezug auf die Ebene $y = 0$, die derjenigen inbezug auf die Ebene ABC im allgemeinen Falle (I. Teil) entspricht, auf den Raum $+y$ beschränken.

Somit ergeben sich die zu einem Tripel uvw gehörigen Standpunkte in folgender Weise: Jede Ebene 1. schneidet den Cylinder 2. nach einer zur y-Axe, den Cylinder 3. nach einer zur x-Axe parallelen Geraden. Demnach erhält man die beiden Standpunkte als die Schnittpunkte von zwei zueinander senkrechten Geraden in zwei horizontalen Ebenen.

Die Gleichungen 1. 2. 3. sind es also, die zur zahlenmäßigen Bestimmung der Koordinaten x, y, z der beiden Standpunkte dienen. Mit Hilfe der zwei sich aus Gleichung 1. berechnenden Werte z ergeben sich aus den Gleichungen 2. und 3. eindeutig die zugehörigen x- und y-Werte, wobei für y nur die positiven Werte zu berücksichtigen sind.

In den Gleichungen 4. mit 7. treten die Bestimmungsstücke des Dreikants $OA_1B_1C_1$ explicit auf; sie dienen also zunächst dazu, bei bekanntem Standpunkte die Winkel dieses Dreikants zu ermitteln. Sie sind aber auch zur Aufsuchung des Standpunktes bei gegebenem Dreikante verwendbar. Die Gleichungen 4. und 5. stellen Kreiskegel mit vertikalen Axen und den Fixpunkten A und B als Spitzen dar. Die Gleichung 6. kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\left[x^2 + \left(y - \frac{a \cdot w}{2 \cdot \text{abs.}\sqrt{1 - w^2}}\right)^2 - \frac{a^2}{4(1 - w^2)}\right]$$
$$\cdot \left[x^2 + \left(y + \frac{a \cdot w}{2 \cdot \text{abs.}\sqrt{1 - w^2}}\right)^2 - \frac{a^2}{4(1 - w^2)}\right] = 0.$$

Sie definiert zwei senkrechte Kreiscylinder durch die Fixpunkte in symmetrischer Lage zur Ebene $y = 0$. In jedem Raum $+y$ und $-y$ sind dadurch die beiden Cylinderteile dargestellt, welche über den Kreisbögen senkrecht stehen, die in der xy-Ebene liegen und über der Strecke A_0B_0 die Winkel α und $180^0 - \alpha$ fassen. Die Gleichung 7. endlich ist die einer Rotationsfläche 2. Ordnung und zwar einer Mittelpunktsfläche mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems als Mittelpunkt.

Denkt man sich zu einem gegebenen Tripel u, v, w die 3 Flächen 4. 5. 6., nämlich die zwei Kegel und die beiden Cylinderteile im Raume $+y$, die wir kurz C_α und $C_{180-\alpha}$ nennen wollen, konstruiert und durch die sämtlichen Schnittpunkte die Erzeugenden gezogen, so entstehen an ihnen Dreikante von der Art, daß die Winkel

$$\beta_1, \beta_2, \alpha, 180^0-\beta_1, 180^0-\beta_2, 180^0-\alpha$$

als Winkel an den Einzeldreikanten vorkommen. Diese Dreikante gehören demnach sowohl zur Klasse I als zur Klasse II. Als Standpunkte kommen von den Schnittpunkten nur diejenigen, und zwar auch nur teilweise, in Betracht, die zur Klasse I gehören, weil sie nur unsere gegebenen Winkel β_1, β_2, α enthält. Dem alleinigen Zwecke, die Spitzen der Dreikante beider Klassen voneinander zu trennen, dient nun die Fläche 7.: sie geht nur durch die Spitzen von solchen Dreikanten, für deren Bestimmungsstücke u, v, w der Quotient $\frac{uv}{w}$ sowohl dem Werte als dem Vorzeichen nach der gleiche ist, und nicht durch die unter den genannten Schnittpunkten enthaltenen Spitzen derjenigen Dreikante, die zur anderen Klasse gehören und für die $\frac{uv}{w}$ zwar den gleichen Wert, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Von den Schnittpunkten der 4 Flächen 4. mit 7. ist jedoch auch nur ein Teil als Standpunkte brauchbar. Den Ausführungen auf S. 56 gemäß muß der Neigungswinkel der Vertikalebenen durch A und B und durch den brauchbaren Standpunkt O, nämlich $\sphericalangle A_0 O_0 B_0$, der Winkel α sein, deshalb muß der Standpunkt auf dem einen Cylinderteil C_α liegen, der durch die Gleichung

$$6^a. \qquad x^2+\left(y-\frac{aw}{2\cdot \text{abs.}\sqrt{1-w^2}}\right)^2-\frac{a^2}{4(1-w^2)}=0$$

definiert ist.

Die gewonnenen Resultate können wir somit in folgendem Satze zusammenfassen:

Sind von einem Dreikant $OABC_1$ die Höhenwinkel β_1 und β_2 der von der Spitze O nach zwei endlichen Punkten A und B laufenden Kanten OA und OB, sowie der Neigungswinkel α der Ebene durch diese Kanten und die Vertikale OC_1 bekannt, so findet man zunächst aus den 3 Gleichungen

1. $(z+z_1)^2 u^2 + (z-z_1)^2 v^2 - 2(z^2 - z_1^2) u v w - a^2 u^2 v^2 = 0$

2. $2 a x u^2 v^2 - (z+z_1)^2 u^2 + (z-z_1)^2 v^2 = 0$

3. $y = + \dfrac{(z^2 - z_1^2)\sqrt{1-w^2}}{a u v}$,

wo $u = \operatorname{tg} \beta_1$, $v = \operatorname{tg} \beta_2$, $w = \cos \alpha$ ist, zwei Punkte als Dreikantsspitzen. Je nachdem beide Punkte der Gleichung

6^a. $x^2 + \left(y - \dfrac{a w}{2 \cdot \text{abs.} \sqrt{1-w^2}} \right)^2 - \dfrac{a^2}{4(1-w^2)} = 0$

oder einer derselben der Gleichung

6^b. $x^2 + \left(y + \dfrac{a w}{2 \cdot \text{abs.} \sqrt{1-w^2}} \right)^2 - \dfrac{a^2}{4(1-w^2)} = 0$

genügt, sind die Horizontalprojektionen beider Winkel AOB gleich α oder die vom einen Winkel gleich α und vom anderen gleich $180^0 - \alpha$, also beide Punkte O, oder nur der eine als Standpunkt brauchbar.

In dem Falle, wo beide Standpunkte brauchbar sind, erkennt man denjenigen, von dem aus die photographische Aufnahme gemacht ist, entweder bereits bei der Berechnung von z an einem praktisch unmöglichen, z. B. übermäßig großen oder negativen Werte, oder nach der Ermittlung der Lagen der Standpunkte aus gewissen Merkmalen der Photographie.

§ 9.

Über die Lage der Standpunkte.

Wie bereits früher, betrachten wir jetzt wiederum u, v, w als Koordinaten eines rechtwinkligen Systems und untersuchen die durch die Gleichungen des Problems vermittelte Abbildung der Räume $u v w$ und $x y z$ ineinander. Dadurch erlangen wir Kenntnis über die Lagenbeziehungen zwischen den Punkten u, v, w und den ihnen entsprechenden Standpunkten x, y, z und umgekehrt.

Die für unseren Zweck günstigsten Gleichungen sind

4. $\left(x - \dfrac{a}{2} \right)^2 + y^2 - \dfrac{(z-z_1)^2}{u^2} = 0$

5. $\left(x + \dfrac{a}{2} \right)^2 + y^2 - \dfrac{(z+z_1)^2}{v^2} = 0$

$6^a.\quad x^2 - \left(y - \frac{a\,w}{2 \cdot \text{abs.}\sqrt{1-w^2}}\right)^2 - \frac{a^2}{4\cdot(1-w^2)} = 0$

$7.\quad \left(x^2+y^2-\frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{u\,v}{w}\right) - (z^2 - z_1{}^2) = 0.$

Für das Folgende wollen wir der Kürze halber unter $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die Kegel 4. und 5., unter $C_\alpha = 0$ den Cylinderteil 6^a. im Raume $-y$ und unter $R = 0$ die Rotationsfläche 2. Ordnung 7. verstehen:

Wir denken uns nun den ganzen u, v, w-Raum von den Ebenen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ und von den hyperbolischen Paraboloiden $\frac{u\,v}{w} = \text{const.}$ durchsetzt. Diese letzteren Flächen $uv - c \cdot w = 0$ bilden das Büschel von gleichseitigen hyperbolischen Paraboloiden mit der u- und der v-Axe als Grundlinien; die Koordinatenebenen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ gehören dem Büschel als spezielle Flächen an. Ebenso denken wir uns den xyz-Raum mit den Flächen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $C_\alpha = 0$ und $R = 0$ durchzogen, die sich für u^2, v^2, w, $\frac{u\,v}{w}$ als variable Parameter ergeben. $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ sind die Kegel, deren Öffnungen für die von 0 bis ∞ stetig aufeinander folgenden Werte für u^2 bezw. v^2 von 180^0 bis zu 0^0 abnehmen, sodaß den Ebenen $u = 0$ und $v = 0$ die Horizontalebenen $z = +z_1$ bezw. $z = -z_1$ und der unendlich fernen Ebene die Vertikalgeraden durch A und B entsprechen. Die den Parameterwerten $\left(\frac{u\,v}{w}\right)$ entsprechenden Flächen $R = 0$ bilden das Büschel, das die

Kreise $\left.\begin{aligned} x^2+y^2-\frac{a^2}{4} &= 0 \\ z - z_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$ und $\left.\begin{aligned} x^2+y^2-\frac{a^2}{4} &= 0 \\ z + z_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$

zu Grundkurven hat. Im einzelnen sind die Flächen

für $\frac{u\,v}{w} = 0$ die Horizontalebenen $z = +z_1$ und $z = -z_1$;

für positiv wachsende Werte von $\frac{u\,v}{w}$ und zwar zunächst

für $0 < \frac{u\,v}{w} < \frac{4\,z_1{}^2}{a^2}$, zweischalige Hyperboloide

$$-(x^2+y^2) + \frac{z^2}{\left(\frac{u\,v}{w}\right)} - \frac{4\,z_1{}^2 - a^2\left(\frac{u\,v}{w}\right)}{4\cdot\left(\frac{u\,v}{w}\right)} = 0,$$

deren Scheitel auf der z-Axe von $z = +z_1$ und $z = -z_1$ an gegen den Anfangspunkt rücken;

für $\frac{uv}{w} = \frac{4z_1^2}{a^2}$ der Kegel $x^2 + y^2 - \frac{z^2 a^2}{4z_1^2} = 0$;

für $\frac{4z_1^2}{a^2} < \frac{uv}{w} < \infty$ einschalige Hyperboloide

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\left(\frac{uv}{w}\right)} - \frac{a^2\left(\frac{uv}{w}\right) - 4z_1^2}{4\cdot\left(\frac{uv}{w}\right)} = 0,$$

deren Kehlkreise in der xy-Ebene, mit dem Anfangspunkte beginnend, größer werden und den Kreis $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} = 0$ als Grenzlage erreichen;

für $\frac{uv}{w} = \infty$ der senkrechte Kreiscylinder durch A und B

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} = 0;$$

für negative Werte von $\frac{uv}{w}$ Ellipsoide

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\left(-\frac{uv}{w}\right)} - \frac{4z_1^2 + a^2\left(-\frac{uv}{w}\right)}{4\left(-\frac{uv}{w}\right)} = 0,$$

deren Rotationsaxen gleichzeitig mit dem Wachsen des Parameters $\frac{uv}{w}$ von $-\infty$ bis 0 von unendlicher Größe bis zur Länge $2z_1$ abnehmen, während sich die Breitenkreise in der xy-Ebene mit dem Kreise $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} = 0$ beginnend ins Unendliche ausdehnen. So entstehen für $\frac{uv}{w} = 0$ wieder die Ebenen $z = +z_1$. Die Flächen $C_\alpha = 0$ sind die im Raume $+y$ gelegenen Abschnitte von Kreiscylindern mit den Vertikalen durch die Fixpunkte A und B als gemeinsamen Erzeugenden, die für $w = 0$ $(\alpha = 90^0)$ mit dem Cylinder $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} = 0$ zusammenfallen, für $1 > w > 0$ $(0^0 < \alpha < 90^0)$ außerhalb und für $0 > w > -1$ $(90^0 < \alpha < 180^0)$ innerhalb desselben liegen.

Konstruiert man nun den Kreiscylinder $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} = 0$ und die zwei Ebenen $z = +z_1$ und $z = -z_1$ (Fig. 19), so wird der ganze xyz-Raum hierdurch in 6 Teile α, β, γ, δ, ε, ζ eingeteilt, von denen wiederum für uns nur die im Raume $+y$ gelegenen Hälften in Betracht kommen. Wenn man sich für die sämtlichen Werte ihrer Parameter die Lagen der eben diskutierten Flächen vergegenwärtigt, so gelangen wir zu folgenden Ergebnissen: Die Punkte u, v, w der Oktanten (vergl. Fig. 3 S. 16)

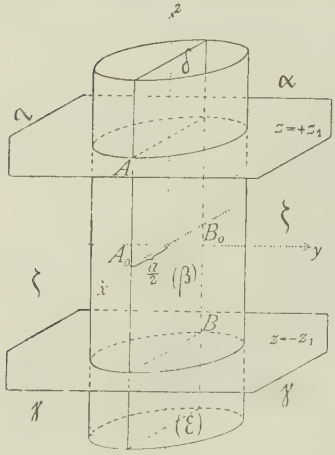


Fig. 19.

1, 8, 3, 6, welche die Klasse I der Dreikante charakterisieren, führen auf Standpunkte in α, β, γ

5, 4, 7, 2, „ „ „ II der Dreikante charakterisieren, führen auf Standpunkte in δ, ε, ζ.

Die Punkte u, v, w der Oktanten

1, 3, für welche $w > 0$ ist, führen auf Standpunkte in den Räumen α und γ

8, 6, „ „ $w < 0$ „ „ „ Standpunkte in dem Raume β

4, 2, „ „ $w > 0$ „ „ „ Standpunkte in dem Raume ζ

5, 7, „ „ $w < 0$ „ „ „ Standpunkte in den Räumen δ und ε.

Die Grenzflächen $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} = 0$, $z = +z_1$, $z = -z_1$ dieser Räume selbst entsprechen bezw. den Koordinatenebenen $w = 0$, $u = 0$, $v = 0$.

§ 10.

Der gefährliche Ort für die Lage der Standpunkte.

Beim Aufsuchen der Standpunkte auf den beiden durch die Wurzeln der Gleichung 1. definierten Horizontalebenen und den beiden parabolischen Cylindern der Gleichungen 2. und 3. ergibt

sich die Realität der Standpunkte stets zugleich mit der Realität der Horizontalebenen, also stets dann, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung für die Höhen z dieser Ebenen positiv ist. Für alle Werte u, v, w, für welche die Diskriminante verschwindet, fallen die Ebenen und wegen der eindeutigen Zuordnung zu den Höhen auch die Standpunkte zusammen. Wird die Diskriminante negativ, so wird das Paar der Standpunkte imaginär. Um im uvw-Raume die Gebiete zu finden, deren Punkten reelle bezw. imaginäre Punkte x, y, z entsprechen, bilden wir die Diskriminante der Gleichung 1.; gleich Null gesetzt, gibt sie die Gleichung der Diskriminantenfläche, die als Ort der auf zusammenfallende Punkte x, y, z führenden Punkte u, v, w die Grenzfläche der zu suchenden Gebiete ist.

Bezeichnen wir abkürzend die Koeffizienten in der quadratischen Gleichung 1. mit P, Q, R, so lautet diese in anderer Anordnung:

$$Pz^2 + 2Qz + R \equiv (u^2 + v^2 - 2uvw)\,z^2 + 2z_1\,(u^2 - v^2)\,z + z_1{}^2\,(u^2 + v^2 + 2uvw) - a^2u^2v^2 = 0.$$

Es ist also die Diskriminante der Gleichung:

$$Q^2 - PR = u^2v^2\,[a^2\,(u^2 + v^2 - 2uvw) - 4z_1{}^2\,(1 - w^2)].$$

Wenn $a^2\,(u^2 + v^2 - 2uvw) - 4z_1{}^2\,(1 - w^2)$

$\left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ ist, so sind beide Punkte } x, y, z \text{ reell und verschieden,} \\ < 0 \text{ ist, so sind beide Punkte } x, y, z \text{ imaginär.} \end{array} \right.$

Wenn $u^2 = 0$

oder $v^2 = 0$

oder $a^2\,(u^2 + v^2 - 2uvw) - 4z_1{}^2\,(1 - w^2) = 0$

ist, so sind die beiden Punkte x, y, z reell und gleich. Da in dem Ausdrucke $Q^2 - PR$ die Quadrate von u und v als Faktoren auftreten, so sind die Ebenen $u = 0$ und $v = 0$ nicht als Bestandteile der Diskriminantenfläche anzusehen; für Punkte auf entgegengesetzten Seiten dieser Ebenen, d. h. für positive und negative Werte von u und v ändert sich das Vorzeichen von $Q^2 - PR$ nicht und die Ebenen haben somit nicht die Eigenschaft, einer Grenzfläche von reellen und imaginären Punkten x, y, z zu entsprechen. (Im mathematischen Sinne bilden sie wohl Diskriminantenflächen, insofern sie, durch die quadratischen Gleichungen $u^2 = 0$ und $v^2 = 0$ dargestellt, als unendlich benachbarte Ebenen aufzufassen sind, in deren unendlich kleinem Zwischenraume der Ausdruck $Q^2 = PR$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie in dem endlichen die beiden Ebenen begrenzenden

Raume hat). Unter der Diskriminantenfläche wollen wir also nur die Fläche

$$\Delta = a^2(u^2+v^2-2uvw)-4z_1^2(1-w^2)=0 \text{ verstehen.}$$

Die Gestalt der Fläche wird leicht erkannt, wenn man eine Drehung des Koordinatensystems um die w-Axe durch 45^0 vornimmt. Mit Hilfe der Substitutionen

$$\sqrt{2}\cdot u=\xi-\eta, \qquad \sqrt{2}\cdot v=\xi+\eta$$

ergibt sich als Gleichung der Fläche im $\xi\eta w$-System

$$a^2[\xi^2+\eta^2-w(\xi^2-\eta^2)]-4z_1^2(1-w^2)=0, \text{ oder}$$

$$\Delta-\frac{\xi^2}{k^2(1+w)}+\frac{\eta^2}{k^2(1-w)}-1=0, \text{ wo } \frac{4z_1^2}{a^2}=k^2 \text{ gesetzt ist.}$$

Aus dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich, daß die Horizontalschnitte $w=\text{const.}$ dieser Fläche 3. Ordnung Kegelschnitte sind, deren Mittelpunkte auf der w-Axe und deren Axen in den Koordinatenebenen $\xi=0$ und $\eta=0$ liegen. Im einzelnen sind die Kegelschnitte

für $-1<w<+1$ Ellipsen (für $w=0$ ein Kreis),

für $w>+1$ u. $w<-1$ Hyperbeln,

für $w=+1$ gerade Linien als Grenzkurven zwischen den Ellipsen und Hyperbeln. Die Ebenen

$$u=k,\ u=-k,\ v=k,\ v=-k$$

berühren die Fläche $\Delta=0$ längs der Geraden

$$\begin{cases} u=k \\ v=kw, \end{cases} \quad \begin{cases} u=-k \\ v=-kw, \end{cases} \quad \begin{cases} v=k \\ u=kw, \end{cases} \quad \begin{cases} v=-k \\ u=-kw. \end{cases}$$

Die Fläche zeigt Symmetrie inbezug auf die u- und die v-Axe, sowie inbezug auf die Ebenen $u=v$ und $u=-v$.

Die Fig. 20 stellt Grund- und Aufriß der Fläche sowie einiger Horizontalschnitte dar, und zwar nur zwischen den Ebenen $w=+1$ und $w=-1$, da nur dieser Flächenteil für die Realität unseres Problems in Betracht kommt.

Was nun die Trennung der Bereiche durch die Diskriminantenfläche $\Delta=0$, in denen Q^2-PR positiv bezw. negativ ist, betrifft, so ergibt sich, daß im Innern des zwischen den Ebenen $w=+1$ und $w=-1$ liegenden, vollständig in sich geschlossenen Flächenteiles, sowie in denjenigen von der Fläche begrenzten Bereichen für $w>+1$ und $w<-1$, welche die w-Axe nicht enthalten, Q^2-PR negativ ist und daß mithin den Punkten dieser Gebiete keine reellen Standpunkte entsprechen. Aber auch den Bereichen für $w>+1$ und $w<-1$,

in denen $Q^2 - PR$ positiv ist, entsprechen keine reellen Standpunkte, weil ihnen imaginäre Winkel α zugehören und die Gleichung 3. für Punkte u, v, w dieser Bereiche imaginäre Koordinaten y liefert. Demnach entsprechen nur den Koordinatentripeln u, v, w der Punkte, die zwischen den Ebenen $w = +1$ und $w = -1$ und im Außenraum des geschlossenen Teiles der Fläche $\Delta = 0$ liegen, reelle Standpunkte x, y, z.

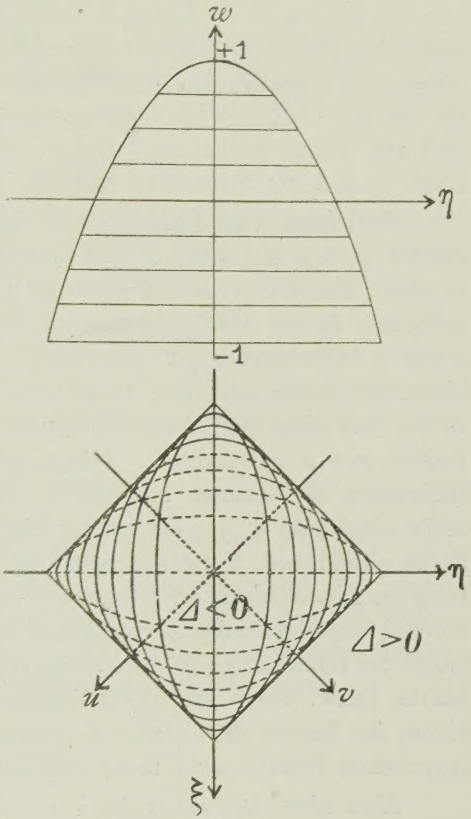


Fig. 20.

Nachdem wir den Ort der Punkte u, v, w, denen zwei zusammenfallende Punkte x, y, z entsprechen, eben die Diskriminantenfläche, kennen, wollen wir noch den „gefährlichen Ort" der zusammenfallenden Punkte selbst ermitteln.

Die Gleichungen 4. mit 7. ergeben:

$$a^2(u^2+v^2-2uvw)-4z_1^2(1-w^2)=\frac{a^2(az-2xz_1)^2}{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right]\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right]}.$$

Der Diskriminantenfläche $\Delta = 0$ entspricht also die doppelt zu zählende Ebene

$$az - 2xz_1 = 0.$$

Diese „gefährliche Ebene" steht auf der Ebene $y = 0$ senkrecht und enthält die y = Axe, sowie die beiden Fixpunkte $A\left(+\frac{a}{2}, 0, +z_1\right)$ und $B\left(-\frac{a}{2}, 0, -z_1\right)$.*)

*) Diese Ebene bildet in Verbindung mit der unendlich fernen Ebene die Spezialisierung des gefährlichen Cylinders im Falle der 3 endlichen Fixpunkte,

Da der Quotient $\dfrac{a^2(az-2xz_1)^2}{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right]\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right]}$

einerseits gleich dem Werte Q^2-PR, anderseits für jedes Wertetripel x, y, z positiv ist, so entsprechen nur den Punkten u, v, w, für die $Q^2-PR>0$ ist, Punkte x, y, z und diese letzteren verteilen sich auf den gesamten xyz-Raum. Damit ist ausgesagt, daß jeder Punkt x, y, z als Standpunkt gewählt werden kann.

Erzielung von Eindeutigkeit im Raume uvw. Da einem Punkte u, v, w 2 Punkte x, y, z entsprechen, oder m. a. W., da sich in einen Punkt u, v, w 2 Punkte x, y, z abbilden, so läßt sich Eindeutigkeit in der Abbildung dadurch erzielen, daß man in den Raum uvw 2 Hilfsräume xyz hineinstellt und die beiden Bildpunkte je einem Hilfsraume zuordnet. Im Gebiete außerhalb der Diskriminantenfläche sind diese Hilfsräume reell, weil jedem Punkte u, v, w 2 reelle Punkte x, y, z entsprechen. Längs der Fläche hängen die beiden Hilfsräume miteinander zusammen, weil einem Punkte u, v, w nur mehr ein Punkt x, y, z entspricht; die sich auf die Diskriminantenfläche abbildende „Verzweigungsfläche“ (in der eingeführten Erweiterung der Riemann'schen Auffassung die Gesamtheit der Verzweigungspunkte) trägt die Punkte der gefährlichen Ebene. Mit dem Zusammenhange der Hilfsräume hört deren Existenz über die Verzweigungsfläche hinaus bezw. durch die Diskriminantenfläche hindurch auf, weil zu einem im Innern der letzteren gelegenen Punkte reelle, ihm entsprechende Punkte nicht mehr vorhanden sind.

Aber nicht nur längs der Fläche $\Delta=0$ hängen die Hilfsräume zusammen, sondern auch längs der Koordinatenebenen $u=0$ und $v=0$ und längs der Ebenen $w=+1$ und $w=-1$. Es entspricht nämlich jedem Punkte dieser Ebenen ein zusammenfallendes Punktepaar x, y, z: für $u=0$ und $v=0$ wird die Diskriminante Q^2-PR zu Null; die Ebenen $w=+1$ und $w=-1$ bilden die Grenze

---

wenn einer von ihnen ins Unendliche rückt: der auf der Ebene ABC senkrechte Kreiscylinder artet in die Ebene aus, die auf der durch A, B und die Richtung des unendlich fernen Punktes C gehenden Ebene senkrecht steht, sowie noch in die unendlich ferne Ebene. Wenn man nämlich homogene Koordinaten $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ einführt, so tritt im Zähler des Bruches der obigen Gleichung der Faktor t^2 hinzu, sodaß tatsächlich die unendlich ferne Ebene einen Bestandteil des gefährlichen Ortes bildet.

zwischen den Räumen, welche reelle bezw. imaginäre Winkel α bestimmen, also auch die Grenze zwischen den durch α wiederum bestimmten reellen und imaginären Punkten u, v, $w = \cos\alpha$. In die Verzweigungsflächen, die sich mit den Ebenen $u = 0$, $v = 0$, $w = \pm 1$ decken, bilden sich bezw. die Ebenen $z = +z_1$, (nach Gl. 4.), $z = -z_1$ (nach Gl. 5.), $y = 0$ (nach Gl. 6) ab.

Anmerkung: Was die äußeren Orientierungselemente anlangt, so sind dieselben teils gegeben, wie der Nadir C_1, teils ist ihre Bestimmung unmittelbar ausführbar, wie die Konstruktion der Hauptvertikalen durch den Hauptpunkt A und C_1 (vergl. hierzu Fig. 17, S. 52). Die Ermittlung der übrigen Orientierungselemente erfolgt in der gleichen Weise wie im I. Teil (S. 39 ff). Die Entfernung des auf der Hauptvertikalen senkrechten Horizonts vom Hauptpunkt A ist:

$$HA = D \operatorname{tg} \nu,$$

wo ν die Neigung der photographischen Aufnahme und $\sin \nu = \frac{D}{D_c}$ ist. Zur Bestimmung der Neigungswinkel der optischen Axe gegen die Koordinatenaxen stellen wir ebenfalls die Gleichung der Ebene durch die Fixpunkte A_1, B_1, C_1 im xyz-Systeme auf und führen die Berechnung den früheren Ausführungen analog durch.